Educación General Básica - Subnivel Superior

MATEMÁTICA



10.º Grado

TEXTO DEL ESTUDIANTE

DISTRIBUCIÓN GRATUITA
PROHIBIDA SU VENTA

Ministerio de Educación

Transformar la educación
MISIÓN DE TODOS

Matemática

10

TEXTO DEL ESTUDIANTE

sm

PRESIDENTE DE LA REPÚBLICA
Rafael Correa Delgado

MINISTRO DE EDUCACIÓN
Augusto Espinosa Andrade

Viceministro de Educación
Freddy Peñafiel Larrea

Viceministra de Gestión Educativa
Daysi Valentina Rivadeneira Zambrano

Subsecretario de Fundamentos Educativos (E)
Miguel Ángel Herrera Pavo

Subsecretaria de Administración Escolar
Mirian Maribel Guerrero Segovia

Directora Nacional de Currículo (S)
María Cristina Espinosa Salas

Directora Nacional de Operaciones y Logística
Ada Leonora Chamorro Vásquez

Av. Amazonas N34-451 y Atahualpa
Quito, Ecuador
www.educacion.gob.ec

Ministerio de Educación

Matemática 10

PROYECTO LICITACIÓN MINISTERIO DE EDUCACIÓN, ECUADOR 2016

Dirección de contenidos editoriales Ecuador
María Alexandra Prócel Alarcón

Creación de contenidos
Luis Humberto Buitrón Aguas

Conceptualización del proyecto para el área
Luis Humberto Buitrón Aguas

Diseño y diagramación
David Rojas

Corrección de estilo
Mónica Martínez, Sofía Garzón

Imagen de la portada
SM Ediciones Ecuador

Fotografía
Archivo SM Ediciones Ecuador, Archivo SM Ediciones Colombia, Shutterstock

Ilustración
Roger Icaza L, Gisela Bohórquez, Mónica Medina

Impreso en Ecuador
Primera impresión: agosto 2016

Este texto fue revisado por la Universidad Politécnica Salesiana y obtuvo la certificación curricular del Ministerio de Educación el 8 de junio de 2016.

ADVERTENCIA
Un objetivo manifiesto del Ministerio de Educación es combatir el sexismo y la discriminación de género en la sociedad ecuatoriana y promover, a través del sistema educativo, la equidad entre mujeres y hombres. Para alcanzar este objetivo, promovemos el uso de un lenguaje que no reproduzca esquemas sexistas, y de conformidad con esta práctica preferimos emplear en nuestros documentos oficiales palabras neutras, tales como las personas (en lugar de los hombres) o el profesorado (en lugar de los profesores), etc. Sólo en los casos en que tales expresiones no existan, se usará la forma masculina como genérica para hacer referencia tanto a las personas del sexo femenino como masculino. Esta práctica comunicativa, que es recomendada por la Real Academia Española en su Diccionario Panhispánico de Dudas, obedece a dos razones: (a) en español es posible <referirse a colectivos mixtos a través del género gramatical masculino>, y (b) es preferible aplicar <la ley lingüística de la economía expresiva> para así evitar el abultamiento gráfico y la consiguiente ilegibilidad que ocurriría en el caso de utilizar expresiones como las y los, os/as y otras fórmulas que buscan visibilizar la presencia de ambos sexos.

Este libro de texto que tienes en tus manos es una herramienta muy importante para que puedas desarrollar los aprendizajes de la mejor manera. Un libro de texto no debe ser la única fuente de investigación y de descubrimiento, pero siempre es un buen aliado que te permite descubrir por ti mismo la maravilla de aprender.

El Ministerio de Educación ha realizado un ajuste curricular que busca mejores oportunidades de aprendizaje para todos los estudiantes del país en el marco de un proyecto que propicia su desarrollo personal pleno y su integración en una sociedad guiada por los principios del Buen Vivir, la participación democrática y la convivencia armónica.

Para acompañar la puesta en marcha de este proyecto educativo, hemos preparado varios materiales acordes con la edad y los años de escolaridad. Los niños y niñas de primer grado recibirán un texto que integra cuentos y actividades apropiadas para su edad y que ayudarán a desarrollar el currículo integrador diseñado para este subnivel de la Educación General Básica. En adelante y hasta concluir el Bachillerato General Unificado, los estudiantes recibirán textos que contribuirán al desarrollo de los aprendizajes de las áreas de Ciencias Naturales, Ciencias Sociales, Lengua y Literatura, Matemática y Lengua Extranjera-Inglés.

Además, es importante que sepas que los docentes recibirán guías didácticas que les facilitarán enriquecer los procesos de enseñanza y aprendizaje a partir del contenido del texto de los estudiantes, permitiendo desarrollar los procesos de investigación y de aprendizaje más allá del aula.

Este material debe constituirse en un apoyo a procesos de enseñanza y aprendizaje que, para cumplir con su meta, han de ser guiados por los docentes y protagonizados por los estudiantes.

Esperamos que esta aventura del conocimiento sea un buen camino para alcanzar el buen vivir.

Ministerio de Educación
2016

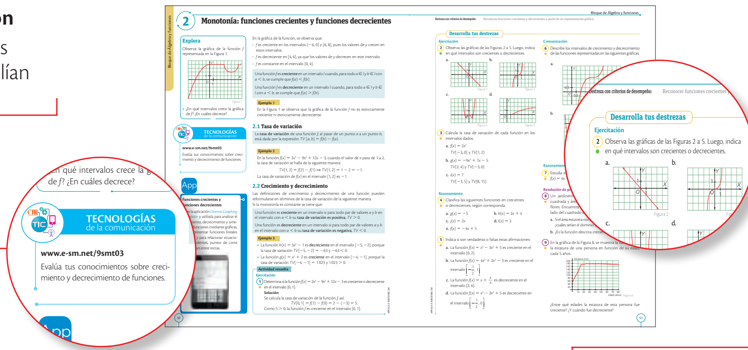
Conoce tu libro

Libro de texto

El libro consta de seis unidades temáticas. Cada unidad desarrolla contenidos asociados a los bloques curriculares propuestos en el currículo nacional: álgebra y funciones, geometría y medida y estadística y probabilidad. **Cada unidad consta de:**

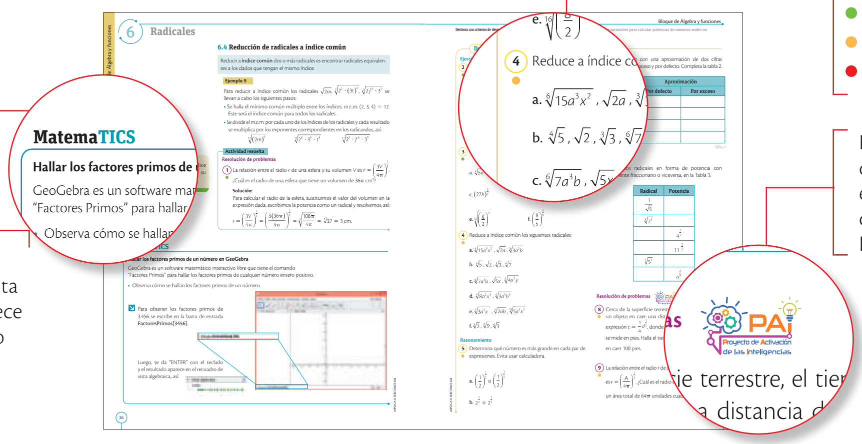
Desarrollo del contenido

Tecnologías de la comunicación
Enlaces a sitios web que amplían los temas.



Desarrolla tus destrezas
Actividades clasificadas por destrezas para aplicar los contenidos estudiados.

Las actividades también están clasificadas por nivel de complejidad.
- Básico
- Intermedio
- Avanzado



En los ejercicios desafiantes encontrarás el ícono PAI (Proyecto de Activación de las Inteligencias).

MatemaTICS
Presenta una herramienta informática que enriquece el quehacer matemático mediante el uso de la tecnología.

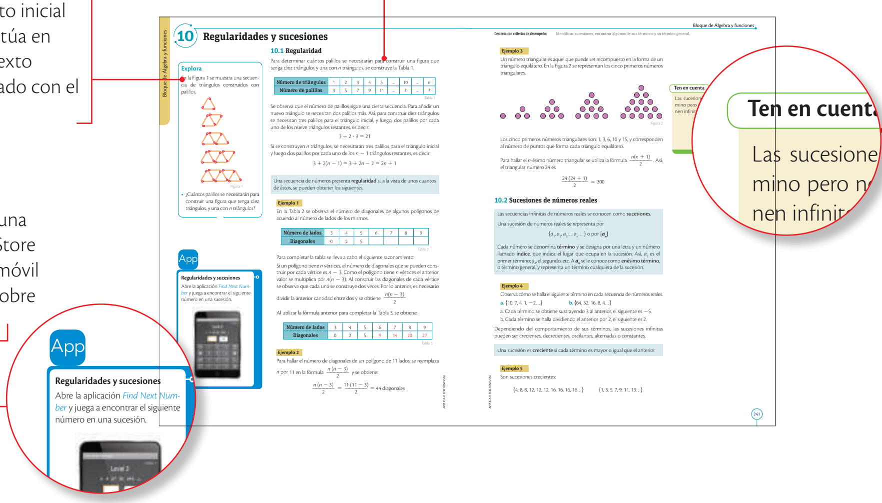
Desarrollo del contenido

Los temas siguen una ruta didáctica clara y secuencial que empieza con un texto (Explora) para captar tu atención e interés. Continúa con el desarrollo del tema, apoyado por ejemplos y actividades resueltas. Al finalizar cada tema podrás encontrar variados ejercicios en **Desarrolla tus destrezas**.

Ten en cuenta
Texto que activa los conocimientos previos o refuerza las explicaciones facilitando el aprendizaje.

Explora
Momento inicial que se sitúa en un contexto relacionado con el tema.

Contenido



App
Invita a descargar una app desde la Play Store de un dispositivo móvil para profundizar sobre los temas vistos.

ÍNDICE

ÍNDICE

ÍNDICE

1 Números reales

BLOQUE

Álgebra
y funciones

A pesar de que los conjuntos numéricos estudiados hasta el momento presentan características especiales que los hacen diferentes entre sí, es fácil concluir que todos los números resultan imprescindibles para determinar, resolver e interpretar una gran variedad de situaciones de la vida cotidiana.

- ¿Crees que exista otro conjunto de números diferente a los que conoces?



Cultura del Buen Vivir

La humildad

Las personas humildes reconocen sus virtudes y habilidades, pero no consideran necesario presumir de ellas frente a los demás.

- ¿Qué opinas de las personas que se sienten superiores y desprecian a otras por su condición social?

Aprenderás...

- Números reales
- Radicales. Operaciones
- Racionalización

Resolución de Problemas

Recursos digitales

LTIC

AI

E



Habilidades lectoras

Eratóstenes calcula la circunferencia de la Tierra

Se dice que el 19 de junio del año 240 a. C., el astrónomo, geógrafo, matemático y bibliotecario griego Eratóstenes calculó la circunferencia de la Tierra. Más tarde, se descubrió que sus cifras eran increíblemente precisas. El genio griego notó que al mediodía, en el solsticio de verano, el Sol se encontraba directamente encima de la ciudad de Siena, la actual Asuán.

En ese momento el reloj de sol no proyectaba sombra. Pero hacia el Norte, en Alejandría, el Sol no se encontraba exactamente encima: un reloj de sol proyectaba sombra incluso al mediodía. A partir de esto, Eratóstenes propuso que la Tierra debía ser redonda. Además, si el Sol se encontraba lo suficientemente lejos para registrar rayos paralelos en Siena y Alejandría, era posible calcular la circunferencia de la Tierra.

Eratóstenes determinó que la sombra en Alejandría era 1/50 de un círculo de 360 grados; luego estimó la distancia entre las dos ubicaciones y multiplicó por 50 para derivar a la circunferencia de la Tierra. Su cifra final fue de 252 000 estadios, o longitud de estadio, que sería entre 39 691 y 45 008 kilómetros. Hoy en día, la cifra aceptada es de aproximadamente 40 075 kilómetros, bastante cerca para un astrónomo de la Antigüedad que no contaba con herramientas modernas.

Rusell, Randy. (2007). Ventanas al universo. Recuperado de: http://www.windows2universe.org/the_universe/uts/eratosthenes_calc_earth_size.html&lang=sp&edu=high

Actividades

Interpreta

1. Según la lectura, ¿cuál es la medida del ángulo generado por Alejandría y Asuán teniendo como vértice el centro de la Tierra?
2. ¿Cuál es la diferencia entre los conceptos “circunferencia de la tierra” y “superficie de la tierra”?

Argumenta

3. ¿Es verdadera la afirmación “Colón descubrió que la Tierra era redonda”? Argumenta tu respuesta.
4. ¿Cuál crees que fue el sólido argumento de Eratóstenes para decir que la Tierra era redonda?
5. ¿Crees que la resolución de triángulos fue utilizada en algún momento para hallar el radio de la Tierra? Explica tu respuesta.

1 Números racionales y números irracionales

Explora

Cada una de las seis caras del cubo de Rubik está compuesta por nueve cuadrados de los colores blanco, amarillo, rojo, azul, naranja y verde (Figura 1).

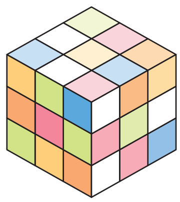


Figura 1

- La solución del rompecabezas consiste en que, al final, los cuadrados de cada cara sean del mismo color. ¿Qué parte del total representan los cuadrados que forman cada cara del cubo solucionado?

1.1 El conjunto de los números racionales

Como el cubo consta de seis caras, y cada cara contiene nueve cuadrados, en total el cubo tiene $6 \cdot 9 = 54$ cuadrados.

De acuerdo con lo anterior, la parte del total de cuadrados que representan los que forman una cara del cubo, es:



$\frac{9}{54}$ $\frac{9}{54}$ $\frac{9}{54}$ $\frac{9}{54}$ $\frac{9}{54}$ $\frac{9}{54}$

El número $\frac{9}{54}$ es un **número racional**.

Un **número racional** se expresa de la forma $\frac{p}{q}$, donde p y q son números enteros y q es distinto de cero.

El conjunto de los **números racionales** $\mathbb{Q}$ se determina así:

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{p}{q} / p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{Z}, q \neq 0 \right\}$$

Ejemplo 1

- El número -957 pertenece al conjunto de los números racionales porque puede escribirse de la forma $\frac{p}{q}$, escribiendo en el denominador de esta fracción el número 1.

$$-957 = \frac{-957}{1}$$

- Otros números racionales son:

$$\frac{-4}{7}, -63, \frac{8}{3}, -\frac{3}{2}$$

Ten en cuenta

En la expresión $\frac{p}{q}$, p es el numerador y q el denominador.

1.2 Expresiones decimales

Todo número racional puede expresarse en forma de **fracción** o como un **decimal finito, infinito periódico puro** o **infinito periódico mixto**.

Las expresiones decimales de los números racionales se pueden clasificar así:

- **Exacta**: cuando el número de cifras decimales es finito.

$$\frac{5}{8} = 0{,}625 \leftarrow \text{expresión decimal finita}$$

- **Periódica pura**: cuando la parte decimal se repite indefinidamente, este conjunto de cifras se denomina periodo.

periodo

$$\frac{5}{9} = 0{,}555\,55... = 0{,}\widehat{5}$$

- **Periódica mixta**: cuando el periodo comienza después de una o varias cifras decimales. El conjunto de cifras que hay entre la coma y el periodo es el anteperiodo.

anteperiodo periodo

$$\frac{96}{55} = 1{,}745\,454\,545\,4... = 1{,}7\widehat{45}$$

Ten en cuenta

Si se toma la expresión fraccionaria de un número racional y se divide el numerador entre el denominador, se obtiene su expresión decimal.

Destreza con criterios de desempeño: Reconocer el conjunto de los números racionales e irracionales e identificar sus elementos.

Ejemplo 2

- La expresión decimal del número racional $\frac{7}{20}$ es 0,35. Por lo tanto, este número tiene una expresión decimal exacta.
- Para el número racional $\frac{5}{-11}$ la expresión decimal es periódica pura porque $\frac{5}{-11} = -0{,}454545\ldots$ que se puede escribir $-0{,}\overline{45}$. Esta notación indica que el periodo es 45.
- La expresión decimal de $\frac{-3}{35}$ es $-0{,}085\,714\,285\,714\,2\ldots = -0{,}0\overline{857\,142}$.
  La parte decimal está formada por el cero (anteperiodo) seguida por el periodo 857 142. Por lo tanto, es una expresión decimal periódica mixta.

1.3 El conjunto de los números irracionales

Todo **número irracional** tiene una expresión decimal infinita no periódica. El conjunto de los números irracionales se simboliza con $\mathbb{I}$.

En otras palabras, los números irracionales no se pueden escribir de la forma $\frac{p}{q}$, donde p y q son números enteros y $q \neq 0$.

Ejemplo 3

Los números $\sqrt[5]{4}$, π, e, $\sqrt[4]{2}$, $\sqrt{5}$, φ pertenecen al conjunto de los números irracionales porque su expresión decimal es infinita no periódica:

$\sqrt[5]{4} = 1{,}319\,507\,91\ldots$ $\qquad \pi = 3{,}141\,592\,653\ldots$

$e = 2{,}718\,281\,828\,4\ldots$ $\qquad \sqrt[4]{2} = 1{,}189\,207\,115\ldots$

$\sqrt{5} = 2{,}236\,067\,977\,4\ldots$ $\qquad \varphi = 1{,}618\,033\,988\,749\ldots$

Para mayor exactitud en los procesos aritméticos y algebraicos, los números irracionales se indican y no se escriben en su expresión decimal.

Según su origen, los números irracionales se clasifican en algebraicos o trascendentes. Observa la Tabla 1.

Clase	Ejemplos	
Número irracional algebraico	El número áureo representado por la letra griega phi.	$\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$
	Las raíces no exactas.	$\sqrt{2}, \frac{\sqrt[3]{3}}{2}, \sqrt{3}, \sqrt[3]{4}, \sqrt[5]{21}$
Número irracional trascendente	El número pi es la relación entre la longitud de una circunferencia y su diámetro.	π
	La constante de Euler o constante de Napier.	e

Tabla 1

CULTURA del Buen Vivir

La humildad

Una persona humilde reconoce sus logros pero evita ser egocéntrica para no perder la objetividad en su manera de actuar diariamente.

- ¿Qué implicaciones podría tener que una persona se concentre solamente en sus logros y deje de ser humilde?

Razonamiento matemático

El primer número irracional

Pitágoras utilizó su teorema para hallar la diagonal de un cuadrado de lado 1, como el que se observa en la Figura 2.

$$d^2 = 1^2 + 1^2$$

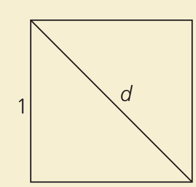


Figura 2

- ¿Cuál es el valor de la diagonal d? ¿A qué conjunto numérico pertenece este valor? ¿Por qué?

1 Números racionales y números irracionales

1.4 Números irracionales en la recta numérica

A cada **número irracional** le corresponde un punto en la recta numérica.

Ejemplo 4

Para ubicar algunos números irracionales en la recta numérica se llevan a cabo los siguientes pasos.

1. Se traza una recta y se ubican los números 0 y 1.
2. Sobre la posición del número 1 se construye un segmento perpendicular con la misma logitud que la unidad.
3. Se une con un segmento el 0 y el extremo superior del segmento perpendicular que se trazó anteriormente.
4. Con un compás se hace centro en 0 y se traza un arco desde la parte superior del segmento perpendicular hasta cortar la recta numérica. Este punto de corte corresponde a $\sqrt{2}$ y se justifica con el teorema de Pitágoras.
5. Para construir las siguientes raíces cuadradas se aplica un proceso similar. Observa la Figura 3.

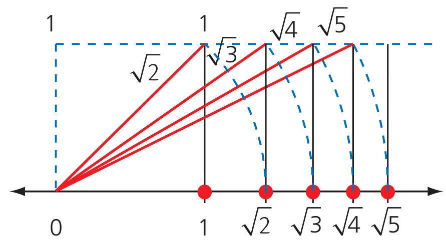


Figura 3

Ejemplo 5

Los números irracionales diferentes a raíces cuadradas no exactas se ubican en la recta numérica haciendo una aproximación en la parte decimal a una o dos cifras. Así, para representar los números irracionales π, e, $-\sqrt[4]{2}$, se pueden utilizar aproximaciones como las siguientes:

$\pi \approx 3{,}14$ $\qquad$ $e \approx 2{,}72$ $\qquad$ $-\sqrt[4]{2} \approx -1{,}2$

Luego, la representación de estos números puede hacerse como se muestra en la Figura 4.

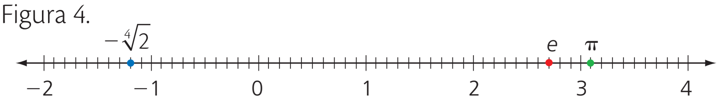


Figura 4

Actividad resuelta

Resolución de problemas

1 Un terreno rectangular mide 12 m de largo y 6 m de ancho. ¿Cuánto mide la diagonal d del terreno? ¿El valor que se halla corresponde a un número irracional? ¿Por qué?

Solución:

Para hallar la diagonal del terreno se hace uso del teorema de Pitágoras.

$$12^2 + 6^2 = d^2, \text{ entonces } d = \sqrt{180} = 13{,}41640\ldots$$

Por lo tanto, la diagonal del terreno mide $\sqrt{180}$ m, que es 13,42 m aproximadamente. El número $\sqrt{180}$ pertenece al conjunto de los números irracionales, pues su expresión decimal es infinita no periódica.

Ten en cuenta

El símbolo ≈ se lee como “es aproximadamente igual a”.

En la calculadora

Cálculo de raíces

Para calcular raíces con índice diferente a 2 se utiliza la segunda función de la tecla ^. Así, para calcular $\sqrt[4]{5}$, se digita:

4 SHIFT ^ 5 EXE

- Calcula las raíces:

$\sqrt[3]{7}$, $\sqrt[6]{10}$, $\sqrt[7]{13}$

Destreza con criterios de desempeño: Reconocer el conjunto de los números racionales e irracionales e identificar sus elementos.

Desarrolla tus destrezas

Ejercitación

2 Halla la expresión decimal de cada número racional. Luego, clasifícala según sea exacta, infinita periódica pura o infinita periódica mixta.

a. $\frac{6}{7}$ b. $-\frac{15}{17}$

c. $-\frac{5}{2}$ d. $\frac{5}{9}$

e. $\frac{5}{42}$ f. $-\frac{3}{2}$

3 Utiliza la calculadora para hallar los valores aproximados a dos decimales de los siguientes números irracionales algebraicos:

a. $\sqrt[3]{9}$ b. $\sqrt[6]{21}$

c. $-\sqrt[9]{2}$ d. $\sqrt[4]{5}$

e. $\sqrt[10]{3}$ f. $-\sqrt[7]{26}$

4 Aproxima a tres cifras decimales los siguientes números racionales:

a. 278, 567 812 b. 12,734 1

c. $\frac{4}{78}$ d. $-348{,}7239$

e. $-\frac{1}{9}$ f. 0,546 72

Comunicación

5 En la Tabla 2, marca con una X la casilla que corresponda, según los números sean racionales o irracionales.

	Es número racional	Es número irracional
$2\sqrt[3]{6}$		
$-\frac{4}{5}$		
$55,\widehat{03}$		
-103		
π		
4,678		
$\frac{99}{8}$		
$-345{,}231409\ldots$		
$\sqrt[3]{8}$		

Tabla 2

Razonamiento

6 Escribe F, si la proposición es falsa o V, si es verdadera.

a. Todo número irracional puede escribirse de la forma $\frac{p}{q}$. ( )

b. Los números irracionales trascendentes pueden ubicarse con exactitud en la recta numérica por medio de aproximaciones decimales. ( )

c. Todo número racional puede expresarse de forma decimal. ( )

d. El primer número racional hallado fue $\sqrt{5}$. ( )

e. El conjunto de los números racionales es un subconjunto de los números naturales. ( )

Modelación

7 Representa en la recta numérica el número irracional $\sqrt{10}$. Explica el proceso que seguiste.

8 En la Figura 5 se muestra la construcción en espiral de las raíces cuadradas de los números 2 al 15. El procedimiento es similar al que se explicó en la página anterior. En una hoja en blanco haz la construcción utilizando una escuadra.

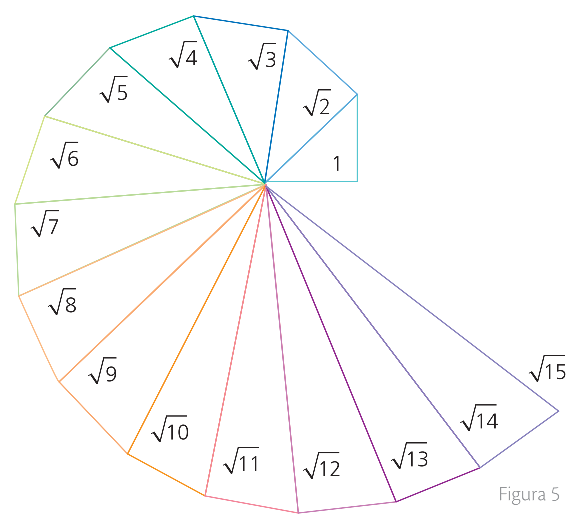


Figura 5

Resolución de problemas

9 El largo y ancho de una piscina olímpica es 50 m y 25 m, respectivamente. Si un nadador quiere recorrerla en diagonal, ¿qué distancia recorre? ¿A qué conjunto numérico pertenece este valor?

10 La parte de la herencia que le corresponde a un hijo es $\frac{8}{9}$ del total. ¿El hijo recibe un valor exacto de dinero?

2 Números reales

Explora

La unión de los conjuntos numéricos $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{I}$ forma el conjunto de los números reales.

- Haz un diagrama de inclusión que resuma la relación que existe entre estos conjuntos.

2.1 El conjunto de los números reales

El diagrama que representa la inclusión de los conjuntos numéricos $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{I}$ y la formación del conjunto de los números reales se presenta en la Figura 1.

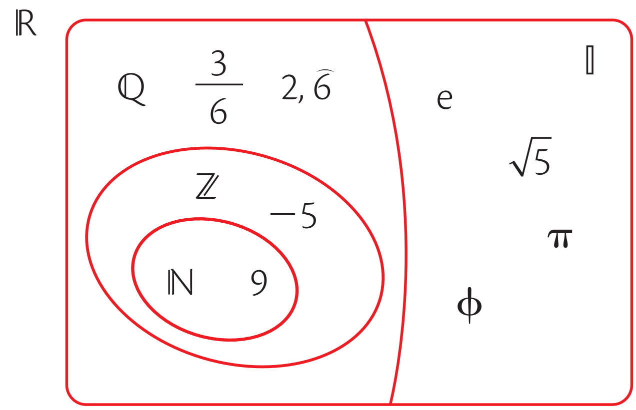


Figura 1

Los **números reales** son el resultado de la unión del conjunto de los números racionales con el conjunto de los números irracionales. Se simboliza con $\mathbb{R}$.

Ejemplo 1

Dada la expresión: "es la circunferencia de un disco volador que tiene un diámetro de 8 cm", ¿cuál es el conjunto de números que mejor describe esta situación?

Los números irracionales son los que mejor describen la relación, ya que para hallar la longitud de la circunferencia se debe multiplicar el diámetro por la constante π.

En este caso 8 se multiplica por π. Por lo tanto, 8π cm es la longitud de la circunferencia del disco y este corresponde a un número irracional.

Ten en cuenta

La representación en la recta numérica de los números reales se hace de la misma manera que la representación de los números racionales e irracionales.

2.2 Expresión aproximada de un número real

Aproximar un número real a ciertas cifras decimales consiste en encontrar **por defecto** o **por exceso** un número muy próximo al dado.

La expresión aproximada de un número real puede hallarse por:

- **Defecto**: cuando se busca un número con un determinado número de cifras decimales inmediatamente menor al dado.
- **Exceso**: cuando se busca un número con un determinado número de cifras decimales inmediatamente mayor al dado.

Ejemplo 2

La aproximación de los números 1,245 6; 8,343 58; y, 10,578 3 a dos cifras decimales es:

Números	Por defecto	Por exceso
1,245 6	1,24	1,25
8,343 58	8,34	8,35
10,578 3	10,57	10,58

Tabla 1

Destrezas con criterios de desempeño:
- Reconocer el conjunto de los números reales R e identificar sus elementos.
- Aproximar números reales a números decimales para resolver problemas.

La mejor **aproximación para un número real** en su expresión decimal es:
- Por defecto, cuando la cifra siguiente a la que se va a aproximar es 0, 1, 2, 3 o 4.
- Por exceso, cuando la cifra siguiente a la que se va a aproximar es 5, 6, 7, 8 o 9.

Ejemplo 3

La mejor aproximación a cuatro cifras para el número 67,982 37 es por exceso 67,982 4 porque la cifra siguiente a 3 es **7**.

TECNOLOGÍAS de la información y la comunicación TIC

www.e-sm.net/9smt01

Encontrarás ejemplos y datos relacionados con los números reales.

Actividades resueltas

Comunicación

1 Justifica por qué la proposición "todo número irracional es natural" es falsa.

Solución:
La proposición es falsa porque el conjunto de los números irracionales no es un subconjunto de los números naturales y viceversa. Son conjuntos que nunca se intersecan.

Resolución de problemas

2 Álvaro paga cuotas mensuales de $785,6 a un banco por un crédito. Si este banco siempre hace ajuste a la unidad. ¿Cuánto paga Álvaro en un mes?

Solución:
Hacer ajuste a la unidad significa aproximar la posición de las unidades. La cifra decimal 6 hace una aproximación por exceso a las 5 unidades, para completar así una unidad más.
Por lo tanto, Álvaro paga una cuota mensual de $786.

Desarrolla tus destrezas

Ejercitación

3 Escribe $\in$ o $\notin$ para establecer la relación de cada número con el conjunto numérico dado.

a. -548	☐	$\mathbb{Q}$
b. $\frac{4}{7}$	☐	$\mathbb{I}$
c. 78,2333…	☐	$\mathbb{Z}$
d. $\sqrt[4]{16}$	☐	$\mathbb{Q}$
e. 0,4352…	☐	$\mathbb{I}$
f. 6π	☐	$\mathbb{Z}$
g. 46,89	☐	$\mathbb{R}$
h. $-\sqrt{7}$	☐	$\mathbb{I}$
i. 8 934	☐	$\mathbb{Z}$
j. $-21e$	☐	$\mathbb{I}$
k. $\frac{87}{5}$	☐	$\mathbb{R}$

Razonamiento

4 Aproxima los siguientes números reales a cuatro cifras decimales:

a. $\sqrt[3]{54}$ b. π

c. $\frac{1}{3}$ d. 429,12359034

e. $\sqrt{3}$ f. $-3{,}54781781...$

5 Responde y justifica.

¿En qué se diferencian los números irracionales de los racionales?

Resolución de problemas

6 Un avión recorre entre dos ciudades 9 770,874 km. ¿Cuál es la mejor aproximación de esta distancia a las unidades ?

7 Se necesita distribuir 27 libros entre 4 personas de manera equitativa. ¿Cuál sería la mejor manera de repartirlos y por qué?

3 La recta real

Explora

Los números reales se pueden representar mediante puntos sobre una recta numérica.

- ¿Cuáles son las características de la recta real?

La **recta real** cumple con ciertas características, tal como se observa en la Figura 1.

- Al punto de referencia arbitrario llamado **origen,** le corresponde el número real **0**.
- Dada una **unidad** conveniente de medición, cada número positivo m se representa por un punto en la recta a una distancia de m unidades a la derecha del origen, y cada número negativo $-x$ se representa mediante un punto a una distancia de x unidades a la izquierda del origen.
- Las flechas a la izquierda y derecha de la recta significan que el conjunto de los números reales es infinito.

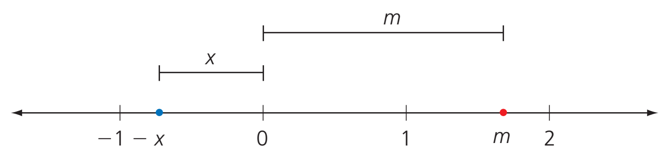


Figura 1

A cada número real le corresponde un **único punto** sobre la recta y a cada punto en la recta real se le asocia un **único número real**.

Ejemplo 1

Los números reales ubicados en la recta real (Figura 2) están ordenados así:

- El número $-\frac{4}{5} < -\frac{1}{2}$, lo cual indica que $-\frac{4}{5}$ está ubicado sobre la recta real más a la izquierda de $-\frac{1}{2}$.
- El número $\sqrt{2} > \frac{e}{2}$, entonces $\sqrt{2}$ está ubicado a la derecha de $\frac{e}{2}$.
- El número $-\sqrt[5]{3} \leq -\sqrt[5]{3}$, esto significa que $-\sqrt[5]{3}$ cumple alguna de las siguientes posibilidades $-\sqrt[5]{3} < -\sqrt[5]{3}$, o $-\sqrt[5]{3} = -\sqrt[5]{3}$. En este caso se cumple la relación de igualdad (=).

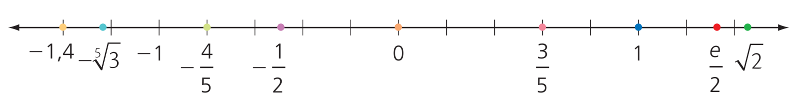


Figura 2

Ten en cuenta

Entre dos números reales hay infinitos números reales.

Ejemplo 2

Para ordenar de menor a mayor el conjunto de números $\left\{\sqrt[7]{2}, -\frac{2}{5}, \sqrt[4]{2}, -\frac{7}{8}\right\}$ se puede hacer una aproximación (para facilitarla comparación) a dos decimales de las expresiones decimales como se muestra a continuación:

$$\sqrt[7]{2} \approx 1{,}10 \qquad \sqrt[4]{2} \approx 1{,}19 \qquad -\frac{7}{8} \approx -0{,}88 \qquad -\frac{2}{5} \approx -0{,}4$$

Luego, el orden del conjunto es: $-\frac{7}{8} < -\frac{2}{5} < \sqrt[7]{2} < \sqrt[4]{2}$

Ejemplo 3

Si a y b son números reales se cumple solo una de las siguientes relaciones:

Relación	Ejemplo
$a < b$, si $a - b < 0$	$3{,}5 < 5{,}2$, porque $3{,}5 - 5{,}2$ es $-1{,}7$ y $-1{,}7 < 0$.
$a > b$, si $a - b > 0$	$8{,}5 > 6{,}4$, porque $8{,}5 - 6{,}4$ es $2{,}1$ y $2{,}1 > 0$.
$a = b$, si $a - b = 0$	$9{,}34 = 9{,}34$, porque $9{,}34 - 9{,}34 = 0$.

Tabla 1

Ten en cuenta

El significado de los símbolos $<$, $>$, $\leq$, $\geq$ es:

$<$ "menor que"

$>$ "mayor que"

$\leq$ "menor que o igual a"

$\geq$ "mayor que o igual a"

Destrezas con criterios de desempeño:

- Hallar el valor absoluto de números reales.
- Establecer relaciones de orden en un conjunto de números reales utilizando la recta numérica y la simbología matemática (=, <, ≤, >, ≥).

3.1 Valor absoluto

El **valor absoluto** de un número real a se simboliza con $|a|$ y es la distancia que hay desde a hasta cero sobre la recta real.

Ejemplo 4

En la Figura 3 se representa en la recta real el significado del valor absoluto de los números -3 y 5.

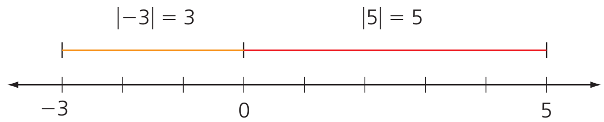


Figura 3

Para simplificar expresiones con valor absoluto es necesario utilizar las propiedades que se definen en la Tabla 2. Allí los valores de a y b son reales.

	Propiedad		Ejemplos
1	El valor absoluto de un número es siempre positivo o cero.	$\|a\| \geq 0$	$\|-8\| = 8 \geq 0$
2	Un número y su opuesto tienen siempre el mismo valor absoluto.	$\|a\| = \|-a\|$	$\|35{,}6\| = \|-35{,}6\|$
3	El valor absoluto de un producto es el producto de los valores absolutos.	$\|ab\| = \|a\|\|b\|$	$\|-4 \cdot 9\| = \|-4\|\|9\|$
4	El valor absoluto de un cociente es el cociente de los valores absolutos.	$\left\|\frac{a}{b}\right\| = \frac{\|a\|}{\|b\|}$	$\left\|\frac{-12}{7}\right\| = \frac{\|-12\|}{\|7\|}$

Tabla 2

Ejemplo 5

Para simplificar la expresión $\left|\frac{|-5|\,|23 \cdot 2|}{|5|}\right|$ se aplican algunas de las propiedades del valor absoluto, así:

$$\left|\frac{|-5|\,|23 \cdot 2|}{|5|}\right| = \left|\frac{|-5 \cdot 46|}{|5|}\right| \text{Propiedad 3}$$

$$= \left|\frac{|-230|}{|5|}\right|$$

$$= \left|\frac{|230|}{5}\right| \text{Propiedades 2 y 4}$$

$$= 46 \text{ Propiedad 1}$$

Si a y b son números reales y $a < b$, entonces la **distancia** entre los puntos a y b en la recta real es: $|b - a| = |a - b|$

Ejemplo 6

Para hallar la distancia entre los números -2 y 11, se calcula el valor absoluto de la resta del número mayor con el número menor, así:

$|11 - (-2)| = |13| = 13$ es la distancia entre los números -2 y 11.

Ten en cuenta

La distancia entre dos puntos siempre es positiva porque es la longitud de un segmento de recta.

Ten en cuenta

$$|a| = \begin{cases} a \text{ si } a \geq 0 \\ -a \text{ si } a < 0 \end{cases}$$

Por lo tanto $|a| \geq 0$

Razonamiento matemático

De invierno a verano

La temperatura de invierno a verano en una ciudad cambia de -27 °C a 28 °C respectivamente.



SM Ediciones

- Utiliza la fórmula de distancia con valor absoluto para hallar cuántos grados Celsius hay entre las dos medidas.

3 La recta real

Ten en cuenta

En la notación y gráfica de intervalos:

Los paréntesis ( ) y los círculos abiertos indican que los valores de los extremos están “excluidos” del intervalo.

Los corchetes [ ] y los círculos llenos indican que los valores de los extremos están “incluidos” en el intervalo.

Ten en cuenta

El símbolo ∞ no es un número. Significa “infinito” e indica que el intervalo no tiene punto final en el extremo indicado.

3.2 Intervalos, semirrectas y entornos

Un **intervalo** es un subconjunto de números reales que se corresponden con los puntos de un segmento o una **semirrecta** en la recta real.

La clasificación de los intervalos se presenta en la Tabla 3, donde los valores de a y b son reales.

Nombre	Notación	Conjunto	Gráfica
Intervalo abierto	(a, b)	$\{x/a < x < b\}$	
Intervalo cerrado	$[a, b]$	$\{x/a \leq x \leq b\}$	
Intervalo semiabierto	$[a, b)$	$\{x/a \leq x < b\}$	
	$(a, b]$	$\{x/a < x \leq b\}$	
Semirrecta	(a, ∞)	$\{x/x > a\}$	
	$[a, \infty)$	$\{x/x \geq a\}$	
	$(-\infty, b)$	$\{x/x < b\}$	
	$(-\infty, b]$	$\{x/x \leq b\}$	
Recta	$(-\infty, \infty)$	$\mathbb{R}$	

Tabla 3

Actividad resuelta

Resolución de problemas

1. Un sismo se considera fuerte según la escala de Richter si tiene una magnitud mayor o igual a 6 y menor que 6,9. ¿Qué intervalo hace relación a la situación planteada?

Solución:

El tipo de intervalo que representa la situación es semiabierto, por tanto su notación es [6; 6,9), el conjunto correspondiente $\{x/6 \leq x < 6{,}9\}$, y su representación gráfica corresponde a la Figura 5.



Figura 4

Destrezas con criterios de desempeño:
- Hallar el valor absoluto de números reales.
- Representar un intervalo en R de manera algebraica y gráfica.

Desarrolla tus destrezas

Ejercitación

2 Halla el valor aproximado con cuatro decimales de las siguientes expresiones con valor absoluto.

a. $|5-\pi|$ b. $||-10|-|-4||$

c. $|\sqrt{5}-5|$ d. $|-4|$

e. $\frac{|-1|}{-1}$ f. $\left|\frac{8-13}{15-7}\right|$

g. $|-15\cdot 8|$ h. $|35\cdot 2\cdot -9|$

3 Determina la distancia entre cada par de números.

a. -5 y 17 b. $-3{,}8$ y 2,4

c. $\frac{3}{5}$ y $-\frac{1}{2}$ d. $-345{,}67$ y 2 986,21

e. $-\frac{56}{9}$ y $-\frac{5}{6}$ f. 8 546 y $-1\,234$

g. -23 y 14 h. 3,45 y 1,45

4 Expresa en forma de intervalo los entornos.

a. $E_4(-2)$ b. $E_2(5)$

c. $E_3(10)$ d. $E_5(-3)$

e. $E_1(-7)$ f. $E_6(1)$

5 Representa en la recta real el siguiente conjunto de números reales.

$$\left\{\sqrt[3]{-8}, -\frac{5}{8}, \frac{28}{99}, \sqrt{3}, \frac{\pi}{4}, -\frac{e}{2}, -1\right\}$$

6 Realiza la gráfica de los siguientes intervalos:

a. $\{x/x \geq -4\}$ b. $\left(-\sqrt{2}, \frac{3}{4}\right]$

c. $\left[-\sqrt[5]{3}, \frac{1}{3}\right)$ d. $\{x/1{,}5 \leq x \leq 3{,}56\}$

e. $\{x/x < -6{,}7\}$ f. $\left(\frac{13}{4}, \infty\right)$

7 Representa en la recta real cada pareja de números y escribe $>$, $<$ o $=$, según corresponda.

a. $-5{,}4$ ☐ $-3{,}8$ b. $-1{,}2$ ☐ 2,3

c. $-\frac{5}{6}$ ☐ $-\frac{10}{12}$ d. $\frac{3}{5}$ ☐ 1,6

e. $-0{,}91$ ☐ $-\frac{7}{3}$ f. $-\frac{1}{4}$ ☐ 2,3

Comunicación

8 Dentro de la notación de conjunto para un intervalo como $\{x/a < x \leq b\}$, la expresión $a < x \leq b$ es llamada desigualdad.

¿Cuál es la desigualdad que representa al intervalo $(-23, 56]$? Explica tu respuesta.

9 Expresa cada proposición mediante la notación de intervalo y conjunto:

a. La estatura de los jugadores de un equipo de baloncesto es menor a 1,98 m y mayor o igual a 1,82 m.

b. Los niveles normales de glucosa en ayunas en un ser humano deben ser mayores o iguales a 70 mg/dl y menores que 100 mg/dl.

c. El tiempo que tarda una persona en llegar a su trabajo es mayor a $\frac{5}{6}$ h y menor o igual a $\frac{3}{2}$ h.

Resolución de problemas

10 La temperatura media en Montreal durante un año se muestra en la Figura 5. Utiliza la fórmula de distancia con valor absoluto para hallar el aumento en grados Celsius entre los meses de enero a julio.

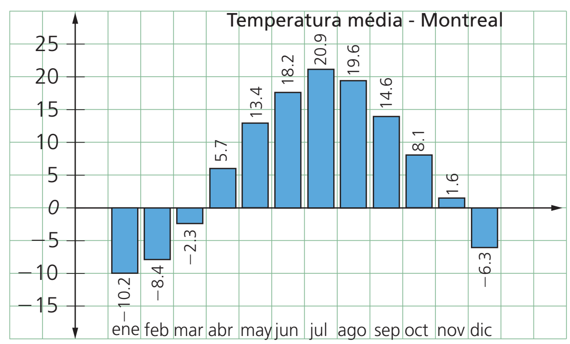


Figura 5

11 Un nutricionista hace un plan de alimentación para que un paciente mantenga su peso normal entre 56,6 kg y 61,5 kg máximo. Responde.

a. Haz una gráfica del intervalo del peso normal.

b. Si el paciente actualmente pesa 75,4 kg, ¿cuántos kilogramos debe perder el paciente para alcanzar el promedio del peso normal?

12 La escala numérica de evaluación por desempeños en una institución educativa se presenta en la Tabla 4.

Nivel de desempeño	Escala numérica
Bajo	[1,0 a 3,0)
Básico	[3,0 a 4,0)
Alto	[4,0 a 4,6)
Superior	[4,6 a 5,0]

Tabla 4

a. ¿Qué tipo de intervalo representa la escala numérica de cada desempeño? Grafícalos.

b. Si un estudiante obtiene 3,94 en su promedio quimestral, ¿qué desempeño obtiene?

4 Potencias con exponente entero

Explora

Fernando y Luisa participan en un concurso de matemáticas. En una de las pruebas deben justificar si la expresión $-5^2 = 25$ es verdadera. Fernando dice que la igualdad es correcta, mientras que Luisa dice que es falsa.



- ¿Quién tiene razón y cuál es la justificación a esta respuesta?

La igualdad $-5^2 = 25$ es falsa porque:

$$-5^2 = -(5 \cdot 5) = -25$$

Lo anterior indica que el exponente 2 afecta solo al número 5 y el signo (−) se ubica luego de hallar la potencia. Por lo tanto, Luisa tiene razón.

4.1 Propiedades de las potencias con exponente entero

Todo número real a diferente de cero, elevado a un **exponente entero** negativo n, cumple que:

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

Para simplificar expresiones donde estén presentes potencias con exponentes enteros se utilizan las propiedades definidas en la Tabla 1. Las bases a y b son números reales diferentes de cero, en los casos que sean denominadores, y los exponentes m y n son números enteros.

	Propiedad	Ejemplo
1	$a^m a^n = a^{m+n}$	$(-3)^2(-3)^5 = (-3)^7$
2	$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$	$\frac{2^{-5}}{2^4} = 2^{-5-4} = 2^{-9} = \frac{1}{2^9}$
3	$(a^m)^n = a^{m \cdot n}$	$(4^5)^7 = 4^{5 \cdot 7} = 4^{35}$
4	$(ab)^n = a^n b^n$	$(-6 \cdot 8)^2 = (-6)^2 \cdot 8^2$
5	$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$	$\left(\frac{3}{7}\right)^6 = \frac{3^6}{7^6}$
6	$\left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\frac{b}{a}\right)^n$	$\left(\frac{5}{2}\right)^{-3} = \left(\frac{2}{5}\right)^3$
7	$\frac{a^{-n}}{b^{-m}} = \frac{b^m}{a^n}$	$\frac{4^{-2}}{3^{-9}} = \frac{3^9}{4^2}$

Tabla 1

Ten en cuenta

$a^0 = 1$, si $a \neq 0$

$a^1 = a$

Ejemplo 1

La simplificación de la expresión $-8^2 \cdot 4^{-3} + 3^0$ es:

$$-8^2 \cdot 4^{-3} + 3^0 = -64 \cdot \frac{1}{64} + 1$$

$$= -\frac{64}{64} + 1 = 0$$

En la calculadora

Potencias con base negativa

Para calcular potencias con base negativa se utilizan las teclas ( ) y ^

Así, para calcular $(-4)^5$, se digita:

(− 4) ^ 5 EXE

- Calcula las siguientes potencias: $(-10)^3, (-2{,}5)^7, (-2)^{13}$

Actividad resuelta

Resolución de problemas

1 Un científico está creando una fórmula general para modelar una situación real. La expresión que escribió es $(3ab^2c)\left(\frac{2a^2b}{c^3}\right)^{-2}$. Ayuda al científico a simplificar la expresión y a eliminar los exponentes.

Solución:

Para simplificar la expresión utilizamos las propiedades definidas en la Tabla 1.

$$(3ab^2c)\left(\frac{2a^2b}{c^3}\right)^{-2} = (3ab^2c)\left(\frac{c^3}{2a^2b}\right)^2 = (3ab^2c)\frac{(c^3)^2}{(2a^2b)^2} = \frac{3ab^2cc^6}{4a^4b^2} = \frac{3c^7}{4a^3}$$

Destreza con criterios de desempeño: Aplicar las propiedades de las potencias con exponente entero, en la resolución de ejercicios y problemas.

Desarrolla tus destrezas

Ejercitación

2 Calcula las siguientes potencias:

a. $(-3{,}5)^3$ b. $8^0 \cdot -\left(\frac{4}{3}\right)^2$

c. $-4^4 \cdot -2^5$ d. $(99^0 - 23{,}4\,)^2$

e. $\frac{3^{-2}}{9}$ f. 0^0

g. $\left(\frac{2}{3}\right)^{-3}$ h. $10^2 \cdot 10^3$

i. $((-4)^2)^{-3}$ j. $\frac{-3^0}{(-3)^2}$

3 Simplifica cada una de las siguientes expresiones y elimina los exponentes negativos.

a. a^8a^{-4} b. $(16x^2y^4)\left(\frac{1}{4}x^5y\right)$

c. $b^4\left(\frac{1}{3}b^2\right)(12b^{-8})$ d. $\frac{(x^2y^3)^4(xy^4)^{-3}}{x^2y}$

e. $\frac{a^{-3}b^4}{a^{-5}b^5}$ f. $\left(\frac{c^4d^3}{cd^2}\right)\left(\frac{d^2}{c^3}\right)^3$

g. $\frac{(xy^{-2}z^{-3})^2}{(x^2y^3)^{-3}}$ h. $\left(\frac{q^{-1}rs^{-2}}{r^{-5}sq^{-8}}\right)^{-1}$

4 Escribe los siguientes números como potencias cuyas bases sean números primos.

a. 8, 125, 243, 1 024, 2 401

b. $\frac{1}{625}, \frac{1}{343}, \frac{1}{256}, \frac{1}{81}, \frac{1}{32}$

Comunicación

5 Escribe la propiedad o definición que se utiliza en cada paso para simplificar la expresión $\left(\frac{36a^{-2}b^{-4}}{9a^{-2}b^{-3}}\right)^{-2}$.

$= (4a^{-2-(-2)}b^{-4-(-3)})^{-2}$ ______

$= (4a^0b^{-1})^{-2}$ ______

$= \left(4 \cdot 1 \cdot \frac{1}{b}\right)^{-2}$ ______

$= \left(\frac{4}{b}\right)^{-2}$ ______

$= \left(\frac{b}{4}\right)^{2}$ ______

$= \frac{b^2}{4^2}$ ______

$= \frac{b^2}{16}$ ______

Razonamiento

6 Completa la Tabla 2.

Base	Exponente	Potencia
$-\frac{5}{3}$	3	$-\frac{125}{27}$
	-2	$\frac{1}{25}$
-101	0	
	3	1 000
25		$\frac{1}{625}$

Tabla 2

7 Calcula mentalmente las siguientes expresiones aplicando las propiedades de los exponentes.

a. $\frac{18^5}{9^5}$ b. $20^6\,(0{,}5)^6$

8 Determina el signo de cada expresión, sabiendo que a, b y c son números reales con $a > 0$, $b < 0$ y $c < 0$.

a. b^5 b. $(b - a)^4$

c. $\frac{a^5c^5}{b^6}$ d. $(b - a)^3$

e. b^{10} f. ab^2c^3

9 Relaciona las expresiones equivalentes.

a. $\frac{3^{-1}}{5^{-1}}$ ☐ 64

b. π^{-2} ☐ $\frac{5}{3}$

c. $\frac{1}{8^{-2}}$ ☐ $\frac{1}{\pi^2}$

Resolución de problemas

10 La edad de una micro bacteria J es de $\frac{1}{3^{-3}}$ días.

a. ¿Cuál es la edad total de tres micro bacterias?

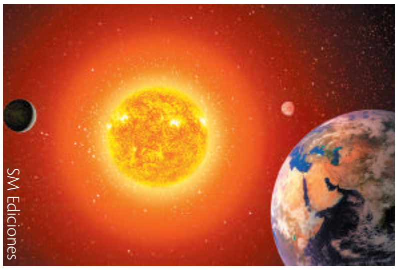
b. Una micro bacteria M vive la tercera parte de la vida de la micro-bacteria J. ¿Cuántos días vive la micro bacteria M?

11 En tecnología informática, un kilobyte tiene el tamaño de 2^{10} bytes. Un gigabyte es 2^{30} bytes en tamaño. El tamaño de un terabyte es el producto del tamaño de un kilobyte por un gigabyte. ¿Cuál es el tamaño de un terabyte?

5 Notación científica

Explora

La distancia entre el Sol y la Tierra es de aproximadamente 149 600 000 km.


SM Ediciones

- Escribe esta distancia en notación científica.

Para escribir la distancia 149 600 000 km usando notación científica, se deben seguir estos pasos:

- Se desplaza la coma decimal en 149 600 000 hacia la izquierda hasta obtener un número mayor o igual a 1 y menor que 10. Se quitan los ceros y se obtiene 1,496.
- Se escribe el producto entre 1,496 y 10^8. El exponente 8 indica las cifras decimales que se desplazó la coma decimal en el paso anterior.

Por lo tanto, $1,496 \cdot 10^8$ es la distancia del Sol a la Tierra en notación científica.

Un número positivo x está escrito en **notación científica** si está expresado como:

$$x = a \cdot 10^n \qquad \text{donde } 1 \leq a < 10 \text{ y } n \in \mathbb{Z}$$

Ejemplo 1

Para escribir el número $3,13 \cdot 10^{-6}$ en notación decimal se desplazan seis cifras decimales hacia la izquierda como lo indica el exponente de 10.

$3,13 \cdot 10^{-6}$ en notación decimal es 0,000 003 13.

5.1 Notación científica y operaciones

Para **sumar** y **restar** números escritos en notación científica es necesario que los números tengan la misma potencia de 10.

Ejemplo 2

Para sumar $3,1 \cdot 10^8$ y $3,38 \cdot 10^7$ se reescribe el número $3,38 \cdot 10^7$ con potencia 10^8, aumentando en 1 el exponente de 10 y desplazando una cifra a la izquierda en el número decimal, así: $3,38 \cdot 10^7 = 0,338 \cdot 10^8$.

Luego, se suman los números decimales y se deja la misma potencia, obteniendo:

$$(3,1 + 0,338) \cdot 10^8 = 3,438 \cdot 10^8$$

Para **multiplicar** y **dividir** números escritos en notación científica se utilizan las propiedades de las potencias.

Ejemplo 3

Para calcular el producto $(1,8 \cdot 10^9)(6,7 \cdot 10^{12})$ se multiplican los números decimales y luego se aplica la propiedad 1 de las potencias para simplificar $10^9 \cdot 10^{12}$, entonces el producto se resuelve así:

$$(1,8 \cdot 10^9)(6,7 \cdot 10^{12}) = 12,06 \cdot 10^{21} = 1,206 \cdot 10^{22}$$

Actividad resuelta

Resolución de problemas

1. Un cabello humano tiene un ancho aproximado de $6,5 \cdot 10^{-5}$ mm. ¿Cuál es el ancho del cabello escrito en notación decimal?

Solución:

Para escribir el ancho del cabello $6,5 \cdot 10^{-5}$ en notación decimal se debe:

- Desplazar cinco cifras decimales a la izquierda como lo indica el exponente de 10 en 6,5.
- Se escribe el número decimal: 0,000 065 mm.

En la calculadora

Sumar números escritos en notación científica

Para sumar números escritos en notación científica se utiliza la tecla EXP

Así, para calcular $4,2 \cdot 10^3 + 9 \cdot 10^{-5}$ se digita:

4 · 2 EXP 3

+ 9 EXP − 5 EXE

- Calcula:

$6,8 \cdot 10^{-2} + 5 \cdot 10^3$

Destreza con criterios de desempeño: Aplicar las potencias de números reales con exponentes enteros para la notación científica.

Desarrolla tus destrezas

Ejercitación

2 Escribe cada número en notación científica.

a. 58 934 000 000 b. 0,000 26
c. 97 000 000 000 d. 396 000 000 000
e. 0,041 9 f. 634 000 000
g. 0,000 000 000 325 h. 921 560 000 000
i. 0,000 000 065 9 j. 634 000 000
k. 0,000 002 13 l. 21 860 000 000

3 Escribe cada número en notación decimal.

a. $6{,}278 \cdot 10^{-10}$ b. $6 \cdot 10^{12}$
c. $9{,}999 \cdot 10^{-9}$ d. $2{,}721 \cdot 10^{8}$
e. $7{,}1 \cdot 10^{14}$ f. $8{,}55 \cdot 10^{-3}$
g. $45{,}678 \cdot 10^{-5}$ h. $3{,}19 \cdot 10^{4}$

4 Utiliza la notación científica, las propiedades de las potencias y la calculadora para obtener el resultado de las siguientes operaciones:

a. $(7{,}2 \cdot 10^{-9})(1{,}806 \cdot 10^{-12})$

b. $\dfrac{(3{,}542 \cdot 10^{-6})^{9}}{(5{,}05 \cdot 10^{4})^{12}}$

c. $\dfrac{(0{,}000\,016\,2)(0{,}015\,82)}{(594\,621\,000)(0{,}005\,8)}$

d. $\dfrac{(73{,}1)(1{,}634\,1 \cdot 10^{28})}{(0{,}000\,000\,001\,9)}$

e. $\dfrac{1{,}295\,643 \cdot 10^{9}}{(3{,}610 \cdot 10^{-17})(2{,}511 \cdot 10^{6})}$

f. $(7{,}2 \cdot 10^{24})(8{,}61 \cdot 10^{19})$

Comunicación

5 Completa la Tabla 1.

Objeto	Radio en metros	
	Decimal	N. científica
La Luna	1 740 000	
Átomo de plata		$1{,}25 \cdot 10^{-10}$
Huevo de pez globo	0,002 8	
Júpiter		$7{,}149 \cdot 10^{7}$
Átomo de aluminio	0,000 000 000 182	
Marte		$3{,}397 \cdot 10^{6}$

Tabla 1

6 Expresa cada proposición en notación científica.

a. La masa de la Tierra es aproximadamente de 5 970 000 000 000 000 000 000 000 kg.

b. El diámetro de un electrón es de casi 0,000 000 000 000 4 cm.

c. Un año luz equivale a 9 461 000 000 000 km

d. La longitud media de un ácaro de polvo es aproximadamente de 0,000 1 mm.

e. El diámetro aproximado del Sol es de 1 400 000 km.

Razonamiento

7 Analiza y responde.

a. ¿Cuál de las siguientes medidas no es necesario escribir en notación científica: número de estrellas en una galaxia, número de granos de arena en una playa, velocidad de un carro, o la población de un país?

b. ¿El número $0{,}9 \cdot 10^{-5}$ está escrito correctamente en notación científica? ¿Por qué?

c. ¿Qué diferencia hay en el exponente de la potencia de 10 cuando escribes un número entre 0 y 1 en notación científica y cuando escribes un número mayor que 1 en notación científica?

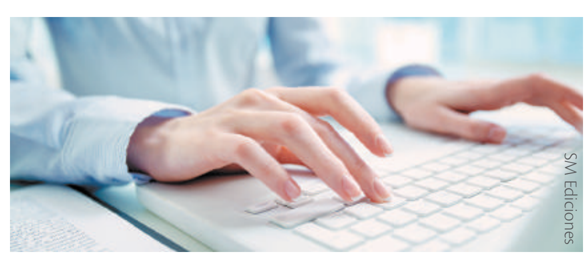
Resolución de problemas

8 Si la velocidad de la luz es $3 \cdot 10^{8}$ m/s, ¿cuánto tarda en recorrer 15 km?

9 Un bebé recién nacido tiene cerca de 26 000 000 000 células. Un adulto tiene cerca de $4{,}94 \cdot 10^{13}$ células. ¿Cuántas células más tiene un adulto que un recién nacido? Escribe la respuesta en notación científica.

10 El área total de terreno en la Tierra es aproximadamente $6 \cdot 10^{7}$ millas cuadradas. El área total de terreno de Australia es cerca de $3 \cdot 10^{6}$ millas cuadradas. Aproximadamente, ¿cuántas veces es mayor el área total del terreno en la Tierra que en Australia?

11 Sara puede digitar cerca de 40 palabras por minuto. ¿Cuántas horas le tomará digitar un texto de $2{,}6 \cdot 10^{5}$ palabras?



6 Radicales

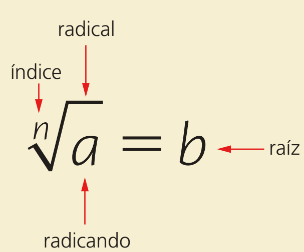
Explora

Andrés está hallando los valores de algunas raíces en la calculadora. Cuando digita la $\sqrt{-8}$, le aparece en la pantalla "Math Error".


SM Ediciones

- ¿Cuál es el significado de "Math Error" para esta raíz?

Ten en cuenta



6.1 Raíz cuadrada y cúbica de un número real

Cuando Andrés digita $\sqrt{-8}$ en la calculadora, el aviso "Math Error" que aparece en la pantalla, significa que hay un error matemático o que el resultado no está definido.

En este caso, se deduce que la raíz cuadrada de -8 no existe porque no hay un número real que multiplicado dos veces por sí mismo dé como resultado -8. Por lo tanto, $\sqrt{-8}$ no está definida en los números reales.

En general, si $n \in \mathbb{Z}^+$, entonces la **raíz n-ésima** de un número real a se define como:

$$\sqrt[n]{a} = b \quad \text{significa que} \quad b^n = a$$

Si n es par, se debe tener que $a \geq 0$ y $b \geq 0$.

Ejemplo 1

Para expresar los números $\sqrt{81}$, $\sqrt[3]{125}$, $\sqrt[3]{-64}$ y $\sqrt[3]{-216}$ en forma de potencia se debe realizar este procedimiento:

a. Calcular las raíces de cada expresión radical, así:

$\sqrt{81} = 9 \qquad \sqrt[3]{125} = 5 \qquad \sqrt[3]{-64} = -4 \qquad \sqrt[3]{-216} = -6$

b. Se establece la relación entre los términos de la radicación y la potenciación. Así:

$\sqrt{81} = 9 \Rightarrow 9^2 = 81 \qquad \sqrt[3]{125} = 5 \Rightarrow 5^3 = 125$

$\sqrt[3]{-64} = -4 \Rightarrow (-4)^3 = -64 \qquad \sqrt[3]{-216} = -6 \Rightarrow (-6)^3 = -216$

Ejemplo 2

El número de raíces reales que tiene un número real depende del signo del radicando y de si el índice es par o impar. Ten en cuenta la información de la Tabla 1.

Índice	Radicando	Número de raíces reales	Ejemplos
Tres	Cualquier número real	Una de igual signo que el radicando	$\sqrt[3]{8} = 2$, porque $2^3 = 8$ $\sqrt[3]{-125} = -5$, porque $(-5)^3 = -125$ $\sqrt[3]{0} = 0$, porque $0^3 = 0$
Dos	Positivo	Dos raíces opuestas	$\sqrt{49} = \pm 7$, porque $7^2 = 49$ o $(-7)^2 = 49$
	Nulo	Una raíz nula	$\sqrt{0} = 0$, porque $0^2 = 0$
	Negativo	No existen raíces reales	$\sqrt{-8} \notin \mathbb{R}$, porque no existe un número real que elevado al cuadrado dé -8.

Tabla 1

Ejemplo 3

Para resolver la expresión $\dfrac{\sqrt[3]{-27} + \sqrt{1}}{\sqrt{4}}$ se calculan las raíces y luego se realizan las operaciones indicadas, así: $\dfrac{\sqrt[3]{-27} + \sqrt{1}}{\sqrt{4}} = \dfrac{-3 + 1}{\pm 2}$

Como en el denominador hay dos resultados posibles, entonces la expresión tiene dos soluciones: $\dfrac{-3+1}{2} = -1$ o $\dfrac{-3+1}{-2} = 1$.

Destreza con criterios de desempeño: Calcular raíces cuadradas de números reales no negativos y raíces cúbicas de números reales, aplicando las propiedades en R.

6.2 Potencias con exponente fraccionario

Toda **potencia con exponente fraccionario** puede escribirse como un radical. Si $m, n \in \mathbb{Z}, n \neq 0$ y $a \in \mathbb{R}$, se cumple que:

$$(a)^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$$

Ejemplo 4

Las potencias $(-3)^{\frac{5}{3}}, (13{,}4)^{\frac{-7}{2}}$, escritas como radicales son:

$$(-3)^{\frac{5}{3}} = \sqrt[3]{(-3)^5} \qquad (13{,}4)^{\frac{-7}{2}} = \sqrt{13{,}4^{-7}}$$

Ejemplo 5

Para resolver la expresión $\dfrac{\sqrt[3]{-8} + (-27)^{\frac{1}{3}}}{64^{\frac{1}{2}}}$ se reescriben las potencias como radicales, luego se calculan las raíces y por último se hacen las operaciones dadas, así:

$$\frac{\sqrt[3]{-8} + (-27)^{\frac{1}{3}}}{64^{\frac{1}{2}}} = \frac{\sqrt[3]{-8} + \sqrt[3]{-27}}{\sqrt{64}} = \frac{-2 + (-3)}{8} = \frac{-5}{8}$$

Ejemplo 6

Identifica los valores de las incógnitas **x, w** y **k** en las expresiones: $81^{\frac{1}{2}} = x$ $(-27)^{\frac{1}{w}} = -3$ y $k^{\frac{1}{2}} = 6$

Se pueden representar primero estas potencias como expresiones radicales. Así:

$$81^{\frac{1}{2}} = x \Rightarrow \sqrt{81} = x; \quad (-27)^{\frac{1}{w}} = -3 \Rightarrow \sqrt[w]{-27} = -3; \quad k^{\frac{1}{2}} = 6 \Rightarrow \sqrt{k} = 6$$

De esta manera es más fácil identificar el valor de las incógnitas. Luego:

$$\sqrt{81} = x \Rightarrow x = 9; \qquad \sqrt[w]{-27} = -3 \Rightarrow w = 3; \qquad \sqrt{k} = 6 \Rightarrow k = 36$$

6.3 Radicales equivalentes

Dos o más **radicales** son **equivalentes** si sus potencias correspondientes tienen la misma base y el mismo exponente.

Ejemplo 7

Los radicales $\sqrt[3]{35^4}$ y $\sqrt[12]{35^{16}}$ son equivalentes porque al escribirlos en forma de potencia sus bases y exponentes son iguales. Observa:

$$\sqrt[3]{35^4} = 35^{\frac{4}{3}} \qquad \sqrt[12]{35^{16}} = 35^{\frac{16}{12}} = 35^{\frac{4}{3}}$$

Ejemplo 8

Para encontrar radicales equivalentes a $\sqrt[4]{5}$ se amplifican o simplifican el índice y el exponente del radicando por un mismo número mayor que 1. Así:

- Si se amplifica por 6, se obtiene el radical equivalente $\sqrt[24]{5^6}$.
- Si se simplifica por 2, se obtiene el radical equivalente $\sqrt{5^{\frac{1}{2}}}$.

CULTURA del Buen Vivir

La humildad

Una persona que actúa con humildad es una persona modesta que se preocupa por las personas que están en su alrededor, a pesar de que sus condiciones y talentos sean diferentes.

- Da algunos ejemplos de cómo consideras que actúa una persona humilde.

Ten en cuenta

Amplificar significa "multiplicar por" y simplificar "dividir por".

Razonamiento matemático

Radicales equivalentes a $\sqrt{2}$

Para hallar radicales equivalentes a $\sqrt{2}$ se amplifica o simplifica.

- ¿Por qué en este caso no funciona la simplificación?

6 Radicales

6.4 Reducción de radicales a índice común

Reducir a **índice común** dos o más radicales es encontrar radicales equivalentes a los dados que tengan el mismo índice.

Ejemplo 9

Para reducir a índice común los radicales $\sqrt{2m}$, $\sqrt[3]{2^2 \cdot (3t)^2}$, $\sqrt[4]{2f^2 \cdot 3^3}$ se llevan a cabo los siguientes pasos:

- Se halla el mínimo común múltiplo entre los índices: m.c.m. (2, 3, 4) = 12. Este será el índice común para todos los radicales.
- Se divide el m.c.m. por cada uno de los índices de los radicales y cada resultado se multiplica por los exponentes correspondientes en los radicandos, así:

$$\sqrt[12]{(2m)^6} \qquad \sqrt[12]{2^8 \cdot 3^8 \cdot t^8} \qquad \sqrt[12]{2^3 \cdot f^6 \cdot 3^9}$$

Ten en cuenta

Cuando un radical no tiene índice es porque la raíz es cuadrada y su índice es 2.

Actividad resuelta

Resolución de problemas

1 La relación entre el radio r de una esfera y su volumen V es $r = \left(\frac{3V}{4\pi}\right)^{\frac{1}{3}}$.

¿Cuál es el radio de una esfera que tiene un volumen de 36π cm^3?

Solución:

Para calcular el radio de la esfera, sustituimos el valor del volumen en la expresión dada, escribimos la potencia como un radical y resolvemos, así:

$$r = \left(\frac{3V}{4\pi}\right)^{\frac{1}{3}} = \left(\frac{3(36\pi)}{4\pi}\right)^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{\frac{108\pi}{4\pi}} = \sqrt[3]{27} = 3 \text{ cm.}$$

MatemaTICS

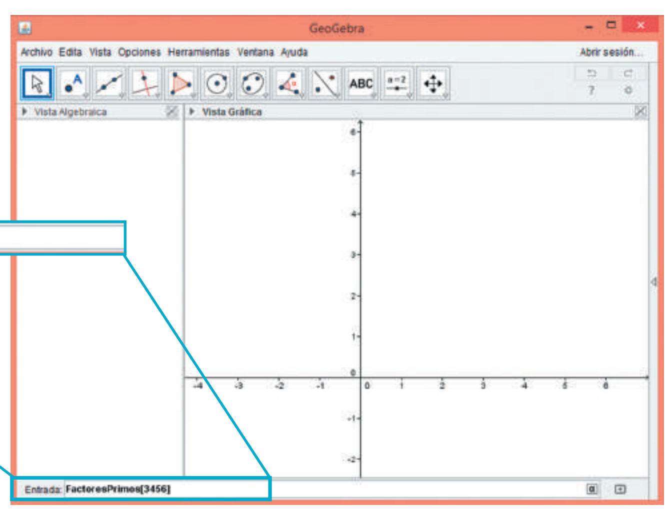
Hallar los factores primos de un número en GeoGebra

GeoGebra es un software matemático interactivo libre que tiene el comando "Factores Primos" para hallar los factores primos de cualquier número entero positivo.

- Observa cómo se hallan los factores primos de un número.

Para obtener los factores primos de 3 456 se escribe en la barra de entrada FactoresPrimos[3456].





Luego, se da "ENTER" con el teclado y el resultado aparece en el recuadro de vista algebraica, así:



Destreza con criterios de desempeño: Identificar las raíces como potencias con exponentes racionales para calcular potencias de números reales no negativos con exponentes racionales en R.

Desarrolla tus destrezas

Ejercitación

2 Simplifica cada expresión.

a. $\sqrt[3]{-8} + (-1)^{\frac{2}{3}}$

b. $\dfrac{-4^{\frac{1}{2}} - \sqrt[3]{-27}}{\sqrt{121}}$

c. $\dfrac{\sqrt{100} - \sqrt{4}}{\sqrt[18]{0}}$

d. $-64^{\frac{1}{3}} \cdot \sqrt{100}$

e. $\dfrac{(64)^{\frac{1}{2}}}{\sqrt[55]{-1}}$

f. $\sqrt[7]{-1} - 5^{\frac{1}{3}}$

3 Halla dos radicales equivalentes a cada radical.

a. $\sqrt[4]{5x}$

b. $\sqrt[8]{(7d)^{22}}$

c. $(27h)^{\frac{6}{7}}$

d. $56^{\frac{1}{3}}$

e. $\sqrt[16]{\left(\dfrac{g}{2}\right)^{4}}$

f. $\left(\dfrac{8}{5}\right)^{\frac{3}{9}}$

4 Reduce a índice común los siguientes radicales:

a. $\sqrt[6]{15a^3x^2}$, $\sqrt{2a}$, $\sqrt[3]{3a^2b}$

b. $\sqrt[4]{5}$, $\sqrt{2}$, $\sqrt[3]{3}$, $\sqrt[6]{7}$

c. $\sqrt[6]{7a^3b}$, $\sqrt{5x}$, $\sqrt[3]{4x^2y}$

d. $\sqrt[4]{8a^2x^3}$, $\sqrt[6]{3a^5b^4}$

e. $\sqrt[5]{3a^2x}$, $\sqrt[3]{2ab}$, $\sqrt[15]{5a^3x^2}$

f. $\sqrt[3]{2}$, $\sqrt[9]{9}$, $\sqrt[6]{3}$

Razonamiento

5 Determina qué número es más grande en cada par de expresiones. Evita usar calculadora.

a. $\left(\dfrac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2}}$ o $\left(\dfrac{1}{2}\right)^{\frac{1}{3}}$

b. $2^{\frac{1}{2}}$ o $2^{\frac{1}{3}}$

6 Calcula la raíz con una aproximación de dos cifras decimales, por exceso y por defecto. Completa la tabla 2.

Raíz	Aproximación	
	Por defecto	Por exceso
$\sqrt{58}$		
$\sqrt{120}$		
$\sqrt[3]{150}$		
$\sqrt{100}$		

Tabla 2

Comunicación

7 Escribe los radicales en forma de potencia con exponente fraccionario o viceversa, en la Tabla 3.

Radical	Potencia
$\dfrac{1}{\sqrt{5}}$	
$\sqrt[3]{7^2}$	
	$4^{\frac{2}{3}}$
	$11^{\frac{3}{2}}$
$\sqrt[5]{5^3}$	
	$a^{\frac{2}{5}}$

Tabla 3

Resolución de problemas

8 Cerca de la superficie terrestre, el tiempo t que tarda un objeto en caer una distancia d, está dado por la expresión $t = \dfrac{1}{4}d^{\frac{1}{2}}$, donde t se mide en segundos y d se mide en pies. Halla el tiempo que tardará un objeto en caer 100 pies.

9 La relación entre el radio r de una esfera y su área total A es $r = \left(\dfrac{A}{4\pi}\right)^{\frac{1}{2}}$. ¿Cuál es el radio de una esfera que tiene un área total de 64π unidades cuadradas?

7 Operaciones con radicales

Explora

El número aproximado C, de calorías, diarias que necesita un animal está dado por la expresión $C = 72\sqrt{m}\cdot m^{\frac{1}{4}}$ donde m es la masa del animal en kg.



- Halla el número de calorías diarias que necesita un tigre siberiano que tiene una masa de 256 kg.

Para hallar el número de calorías diarias que necesita un tigre siberiano cuya masa es de 256 kg se realiza el siguiente procedimiento:

$C = 72\sqrt{m}\cdot m^{\frac{1}{4}}$

$= 72\sqrt{256}\cdot 256^{\frac{1}{4}}$	Se sustituye m por 256.
$= 72\sqrt{256}\cdot\sqrt[4]{256}$	Se aplica la definición $(a)^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$.
$= 72\sqrt[4]{256^2}\cdot\sqrt[4]{256}$	Se reducen los radicales a índice común.
$= 72\sqrt[4]{256^2\cdot 256}$	Se aplica la propiedad $\sqrt[n]{a\cdot b} = \sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[n]{b}$.
$= 72\sqrt[4]{256^3}$	Se aplica la propiedad 1 de potencias $a^n a^m = a^{m+n}$.
$= 72\sqrt[4]{\left(2^8\right)^3}$	Se escribe 256 en sus factores primos.
$= 72\sqrt[4]{2^{24}}$	Se aplica la propiedad 3 de potencias $(a^m)^n = a^{m\cdot n}$.
$= 72\cdot 2^6$	Se simplifica el radical.
$= 4\,608$	Se hace la multiplicación.

Por lo tanto, el número de calorías diarias que necesita el tigre es de 4 608.

Para **simplificar** expresiones con radicales donde intervengan productos, cocientes o potencias se aplican las propiedades que se definen en la Tabla 1, donde

$a, b \in \mathbb{R}$ y $m, n \in \mathbb{Z}^+$.

	Propiedad	Ejemplos
1	$\sqrt[n]{a\cdot b} = \sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[n]{b}$	$\sqrt[3]{-27\cdot 8} = \sqrt[3]{-27}\cdot\sqrt[3]{8} = (-3)(2) = -6$
2	$\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$; $b \neq 0$	$\sqrt[4]{\frac{81}{16}} = \frac{\sqrt[4]{81}}{\sqrt[4]{16}} = \frac{3}{2}$
3	$\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[mn]{a}$	$\sqrt{\sqrt[3]{729}} = \sqrt[6]{729} = 3$
4	$\sqrt[n]{a^n} = a$ si n es impar	$\sqrt[3]{(-5)^3} = -5$ y $\sqrt[5]{2^5} = 2$
5	$\sqrt[n]{a^n} = \lvert a\rvert$ si n es par	$\sqrt[4]{(-3)^4} = \lvert -3\rvert = 3$

Tabla 1

Ten en cuenta

En las simplificaciones de expresiones con radicales, los radicales pueden descomponerse en sus factores primos para agilizar el proceso.

Actividad resuelta

Resolución de problemas

1 El área de una ventana cuadrada se expresa mediante la fórmula $A = \frac{1{,}44x^{16}}{w^8}$. ¿Cuáles son las dimensiones de la ventana?

Solución:

Como el área de un cuadrado de lado l es la potencia l^2, entonces $l = \sqrt{\frac{1{,}44x^{16}}{w^8}}$.

Al simplificar esta expresión según las propiedades de los radicales, se obtiene:

$$l = \sqrt{\frac{1{,}44x^{16}}{w^8}} = \frac{\sqrt{1{,}44x^{16}}}{\sqrt{w^8}} = \frac{\sqrt{1{,}44}\,\sqrt{x^{16}}}{\sqrt{w^8}} = \frac{1{,}2x^8}{w^4}.$$

Destrezas con criterios de desempeño:
· Identificar las raíces como potencias con exponentes racionales para calcular potencias de números reales no negativos con exponentes racionales en R.
· Resolver operaciones con radicales en R.

Desarrolla tus destrezas

Ejercitación

2 Realiza las siguientes operaciones entre radicales.

a. $\sqrt[10]{16^{10}} \cdot \sqrt[4]{8^{12}} \cdot \sqrt[5]{16^{10}}$

b. $\sqrt[3]{\sqrt{16x^6}}$

c. $\dfrac{\sqrt[9]{27}}{\sqrt[6]{3}}$

d. $\dfrac{\sqrt[4]{\sqrt[5]{f^6}}}{\sqrt[10]{f}}$

e. $\sqrt[3]{a^2b} \cdot \sqrt[3]{a^4b}$

f. $\sqrt[6]{x^7} \cdot \sqrt[4]{x^3} \cdot \sqrt[7]{\left(x^3\right)^3} \cdot \sqrt[4]{\left(x^3\right)^4}$

g. $\dfrac{-\sqrt[3]{t^5h^7}}{\sqrt[6]{th^2}}$

h. $\dfrac{\sqrt[3]{256}}{\sqrt[8]{16}}$

3 Simplifica cada expresión utilizando las propiedades de los radicales y eliminando los exponentes negativos.

a. $\dfrac{\sqrt[5]{g^{15}b^{50}} \cdot \sqrt[4]{(-81)^4\, b^{-20}}}{\sqrt[20]{g^3}}$

b. $\sqrt[3]{\dfrac{216x^{-8}y^{-12}}{x^{16}}}$

c. $\sqrt{196\sqrt[3]{a^{18}b^{12}}}$

d. $\sqrt[4]{\sqrt{x^{16}c^{24}m^{-16}}}$

e. $\sqrt[5]{\dfrac{128h^{15}f^{-10}}{4f^{20}}}$

f. $\sqrt{\dfrac{1}{64}m^{-10}b^{14}} \cdot \sqrt[3]{-64m^9b^{-6}}$

g. $\sqrt[5]{\dfrac{3125k^{25}s^{60}}{k^5}} \cdot \sqrt[5]{\dfrac{-243s^{10}}{k^{-5}}}$

Razonamiento

4 Explica si cada igualdad es falsa o verdadera.

a. $\sqrt{a+b} = \sqrt{a} + \sqrt{b}$

b. $(4+3)\sqrt{2} = 4 + 3\sqrt{2}$

c. $\sqrt{a \cdot b} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$

d. $(4+3)\sqrt{2} = 7\sqrt{2}$

5 Encuentra el error en la siguiente simplificación y luego realízala de forma correcta.

$$\frac{\sqrt[5]{\sqrt[3]{w^{30}g^{-90}}}}{\sqrt[3]{\sqrt[5]{w^{15}g^{-120}}}} \cdot \sqrt[15]{-32768} = \frac{\sqrt[15]{w^{30}g^{-90}}}{\sqrt[15]{w^{15}g^{-120}}} \cdot \sqrt[15]{-32768}$$

$$= \frac{\sqrt[15]{-32768 \cdot w^{30}g^{-90}}}{\sqrt[15]{w^{15}g^{-120}}} = \sqrt[15]{\frac{-32768 \cdot w^{30}g^{-90}}{w^{15}g^{-120}}}$$

$$= \sqrt[15]{(-2)^{15} \cdot w^{15}g^{-210}} = \frac{-2w}{g^{14}}$$

Comunicación

6 Analiza y responde.

Para introducir coeficientes bajo un mismo radical se eleva el coeficiente al número correspondiente del índice del radical. Así, en la expresión $\frac{2}{3}ab^2\sqrt[4]{c^3}$ al introducir el coeficiente $\frac{2}{3}ab^2$ dentro del radical se obtiene $\sqrt[4]{\frac{2^4}{3^4}a^4b^8c^3}$. Introduce los coeficientes en las siguientes expresiones.

a. $0{,}2\, xy^3z^5\sqrt[3]{200w}$

b. $\dfrac{5m^2n^4}{4p^{24}}\sqrt[3]{\dfrac{4m}{p}}$

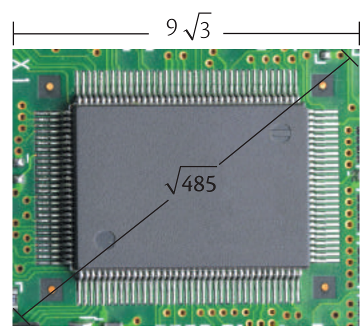
c. $\dfrac{3}{5}h^3g^2\sqrt[5]{g^3h}$

d. $\dfrac{1}{2}m^2h^3\sqrt[4]{c^3}$

Resolución de problemas

PAI Proyecto de Activación de las Inteligencias

7 Un microchip rectangular mide $9\sqrt{3}$ de largo y su diagonal mide $\sqrt{485}$. ¿Cuál es el área del microchip?



8 Antes de determinar la dosis de una droga para un paciente, los doctores a veces calculan su área de superficie corporal (BSA). La fórmula para hallarla es $\sqrt{\dfrac{w \cdot h}{3600}}$, donde w es el peso en kg y h es la altura en cm. Si un paciente pesa 80 kg y tiene un BSA de $\sqrt{\dfrac{35}{9}}$ m². ¿Cuál es su altura en metros?

8 Radicales semejantes

Explora

A Juanita le piden reducir a radicales semejantes las expresiones $\sqrt[3]{875}$ y $\sqrt[3]{448}$.



- ¿Cuál es el procedimiento para reducir estas expresiones a radicales semejantes?

8.1 Reducción a radicales semejantes

Para reducir a radicales semejantes las expresiones $\sqrt[3]{875}$ y $\sqrt[3]{448}$, se realiza el siguiente procedimiento:

1. Los radicandos se expresan en sus factores primos:

$$\sqrt[3]{875} = \sqrt[3]{5^3 \cdot 7} \quad \text{y} \quad \sqrt[3]{448} = \sqrt[3]{2^6 \cdot 7}$$

2. Se simplifican las expresiones aplicando las propiedades 1 y 4 de los radicales.

$$\sqrt[3]{5^3 \cdot 7} = \sqrt[3]{5^3} \cdot \sqrt[3]{7} = 5\sqrt[3]{7} \quad \text{y} \quad \sqrt[3]{2^6 \cdot 7} = \sqrt[3]{2^6} \cdot \sqrt[3]{7} = 4\sqrt[3]{7}$$

Las expresiones simplificadas $5\sqrt[3]{7}$ y $4\sqrt[3]{7}$ son radicales semejantes porque tienen el mismo índice y el mismo radicando.

Dos o más **radicales** son **semejantes** si al simplificarlos tienen el mismo índice y el mismo radicando.

Ejemplo 1

Para determinar si las expresiones radicales:

$-\frac{3}{5}\sqrt[3]{625x^6}$, $\frac{3}{2}\sqrt[3]{1080}$, $-\frac{1}{7}\sqrt[3]{1715x^9}$ y $\frac{3}{8}\sqrt[3]{16875}$ son semejantes, se simplifican como se observa en la Tabla 1.

$-\frac{3}{5}\sqrt[3]{625x^6}$	$\frac{3}{2}\sqrt[3]{1080}$	$-\frac{1}{7}\sqrt[3]{1715x^9}$	$\frac{3}{8}\sqrt[3]{16875}$
$= -\frac{3}{5}\sqrt[3]{5^3 \cdot 5 \cdot x^6}$	$= \frac{3}{2}\sqrt[3]{2^3 \cdot 3^3 \cdot 5}$	$= -\frac{1}{7}\sqrt[3]{7^3 \cdot 5 \cdot x^9}$	$= \frac{3}{8}\sqrt[3]{3^3 \cdot 5^3 \cdot 5}$
$= -\frac{3}{5} \cdot 5 \cdot x^2\sqrt[3]{5}$	$= \frac{3}{2} \cdot 2 \cdot 3\sqrt[3]{5}$	$= -\frac{1}{7} \cdot 7 \cdot x^3\sqrt[3]{5}$	$= \frac{3}{8} \cdot 3 \cdot 5\sqrt[3]{5}$
$= -3x^2\sqrt[3]{5}$	$= 9\sqrt[3]{5}$	$= -x^3\sqrt[3]{5}$	$= \frac{45}{8}\sqrt[3]{5}$

Tabla 1

Una vez simplificadas las expresiones se observa que todas comparten $\sqrt[3]{5}$. Por lo tanto son semejantes.

Ejemplo 2

Las expresiones radicales $-\frac{1}{5}\sqrt{700m^{10}}$ y $\sqrt{2187m}$ no son semejantes porque al simplificarlas se obtiene $-2\sqrt{7}$ y $\sqrt{3m}$ y estos radicales no comparten el mismo radicando.

Ejemplo 3

Para comprobar si dos radicales son semejantes se pueden comparar cada uno de sus términos. Observa:

igual índice

$3\sqrt[3]{5x} \qquad -2\sqrt[3]{5x} \qquad \frac{3}{4}\sqrt[3]{5x}$

igual cantidad subradical

Razonamiento matemático

"Equivalente" o "semejante"

Al simplificar las expresiones

$-\frac{3}{4}\sqrt[4]{(5)^4 h}$ y $\frac{3}{4}\sqrt[4]{(-5)^4 h}$

¿Puedes concluir que son equivalentes o semejantes? ¿Por qué?

Destreza con criterios de desempeño: Operar con radicales semejantes en la resolución de ejercicios y problemas.

8.2 Adición y sustracción de radicales

Para **sumar** o **restar radicales** se reducen a radicales semejantes y se operan los coeficientes.

Ejemplo 4

Para realizar las operaciones indicadas en la expresión

$\sqrt[3]{40h^9} + \sqrt[3]{1029m^6} - \sqrt[3]{625h^9}$ se reduce a radicales semejantes y se opera, así:

$$\sqrt[3]{2^3 \cdot 5 \cdot h^9} + \sqrt[3]{3 \cdot 7^3 \cdot m^6} - \sqrt[3]{5^3 \cdot 5 \cdot h^9} = 2h^3\sqrt[3]{5} + 7m^2\sqrt[3]{3} - 5h^3\sqrt[3]{5}$$

$$= (2h^3 - 5h^3)\sqrt[3]{5} + 7m^2\sqrt[3]{3} = -3h^3\sqrt[3]{5} + 7m^2\sqrt[3]{3}$$

Ejemplo 5

El resultado de la suma $\sqrt{20} + \frac{1}{3}\sqrt{45} + 2\sqrt{125}$ es:

$$\sqrt{20} + \frac{1}{3}\sqrt{45} + 2\sqrt{125} = 2\sqrt{5} + \frac{1}{3} \cdot 3\sqrt{5} + 10\sqrt{5} = (2 + 1 + 10)\sqrt{5} = 13\sqrt{5}$$

Actividad resuelta

Resolución de problemas

1 El perímetro del trapecio (Figura 1) está determinado por la expresión $5\sqrt{2x} + 7\sqrt{3x^2}$ si la base mayor es el doble de la base menor. Determina la expresión de las medidas de sus bases.

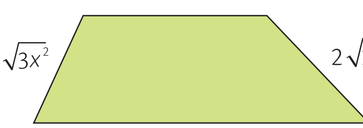


Figura 1

Solución:

El perímetro es la suma de las medidas de los lados. Para determinar la medida de las bases, se plantea una ecuación donde b es la medida de la base menor:

$$\sqrt{3x^2} + 2\sqrt{2x} + 2b + b = 5\sqrt{2x} + 7\sqrt{3x^2}$$

Si se despeja b se obtiene:

$$b = \sqrt{2x} + 2\sqrt{3x^2}$$

Por lo tanto, la expresión de la base menor es $\sqrt{2x} + 2\sqrt{3x^2}$ y de la base mayor es el doble de esta, es decir: $2\left(\sqrt{2x} + 4\sqrt{3x^2}\right) = 4\sqrt{2x} + 8x\sqrt{3}$.

Desarrolla tus destrezas

Ejercitación

2 Realiza las operaciones indicadas.

a. $\frac{1}{4}\sqrt{80} - \frac{1}{6}\sqrt{63} - \frac{1}{9}\sqrt{180}$

b. $0{,}5x\sqrt{y} + 1{,}8\sqrt{x^2y} - 0{,}7x^{-1}\sqrt{x^4y}$

c. $3\sqrt[3]{2x^2} - 7^3\sqrt[3]{16x^2} + 5\sqrt[3]{54x^2}$

d. $\frac{2}{3}b\sqrt[4]{a^6b^4} - \frac{5}{6}a\sqrt[4]{a^2b^8} + \frac{3}{4}b^{-1}\sqrt[4]{a^6b^{12}}$

e. $3\sqrt[3]{3a}\left(4\sqrt[3]{7a^2} + 5\sqrt[3]{7a^2}\right)$

f. $-4 \cdot \sqrt{49b^{-4}} + \sqrt{81b^{-4}} + \sqrt{144b^{-4}}$

Razonamiento

3 La expresión $\sqrt{a+b} \leq \sqrt{a} + \sqrt{b}$ se llama **desigualdad triangular.** Encuentra un valor de a y otro de b para que se cumpla dicha desigualdad.

Resolución de problemas

4 La medida del lado de un cuadrado está dado por la expresión $g\sqrt{g^3} - 3\sqrt{j^5}$ dm. ¿Cuál es el área del cuadrado?

5 ¿Cuál es el perímetro de un terreno rectangular cuyos lados son $\sqrt[5]{32c}$ m y $\sqrt[5]{243c}$ m?

6 ¿Cuál es el perímetro total de un paralelogramo oblicuo, cuya base mide $2\sqrt[3]{54x^2}$ cm, y cuyo lado oblicuo mide $3\sqrt[3]{54x^2}$ cm?

9 Racionalización

Explora

Cuando una fracción tiene radicales en el denominador siempre es posible expresarla como una fracción equivalente sin radicales en él.

Para la expresión radical:

$$\frac{34}{\sqrt{5m}}$$

- Halla una expresión equivalente a esta, cuyo denominador no tenga radicales.

Para eliminar el radical en el denominador de la expresión $\frac{34}{\sqrt{5m}}$, se debe amplificar la fracción por $\sqrt{5m}$, así:

$$\frac{34}{\sqrt{5m}} \cdot \frac{\sqrt{5m}}{\sqrt{5m}} = \frac{34\sqrt{5m}}{5m}$$

De esta manera, se elimina el **radical de índice 2** en el denominador y se obtiene: $\frac{34\sqrt{5m}}{5m}$ que es una expresión equivalente a $\frac{34}{\sqrt{5m}}$.

La **racionalización** es un proceso en el que se elimina la parte radical en el denominador de una expresión.

Ejemplo 1

Para racionalizar la expresión $\frac{3h}{\sqrt[3]{9h}}$, donde el **índice del radical es 3**, se amplifica la fracción por un factor que elimine el radical en el denominador. Es decir, se busca un **factor racionalizante** que multiplicado por $\sqrt[3]{9h} = \sqrt[3]{3^2 h}$ dé como resultado $3h$. En este caso el factor es $\sqrt[3]{3h^2}$ porque $\sqrt[3]{3^2 h} \cdot \sqrt[3]{3h^2} = 3h$.

Al racionalizar la expresión se obtiene:

$$\frac{3h}{\sqrt[3]{3^2 h}} \cdot \frac{\sqrt[3]{3h^2}}{\sqrt[3]{3h^2}} = \frac{3h \cdot \sqrt[3]{3h^2}}{3h} = \sqrt[3]{3h^2}$$

Ejemplo 2

Para racionalizar la expresión $\frac{3x}{\sqrt{x} + \sqrt{2}}$, donde el denominador es un binomio, la fracción se amplifica por el **conjugado** del denominador, es decir, por el binomio con signo opuesto en el segundo término: $\sqrt{x} - \sqrt{2}$. La racionalización se hace así:

$$\frac{3x}{\sqrt{x} + \sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{x} - \sqrt{2}}{\sqrt{x} - \sqrt{2}} =$$

$$\frac{3x\left(\sqrt{x} - \sqrt{2}\right)}{\left(\sqrt{x}\right)^2 - \sqrt{x} \cdot \sqrt{2} + \sqrt{2} \cdot \sqrt{x} - \left(\sqrt{2}\right)^2} =$$

$$\frac{3x\left(\sqrt{x} - \sqrt{2}\right)}{x - 2}$$

Ten en cuenta

En el producto especial:

$(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$, cada uno de los factores se denomina como el conjugado del otro factor.

Actividad resuelta

Razonamiento

1. ¿Cómo se racionaliza la expresión $\frac{b^h}{\sqrt[m]{a^n}}$, donde el radical tiene índice entero positivo m?

Solución:

La racionalización de la expresión es: $\frac{b^h}{\sqrt[m]{a^n}} \cdot \frac{\sqrt[m]{a^{m-n}}}{\sqrt[m]{a^{m-n}}} = \frac{b^h \cdot \sqrt[m]{a^{m-n}}}{a}$

Destreza con criterios de desempeño: Reescribir expresiones numéricas o algebraicas con raíces en el denominador utilizando propiedades en R (racionalización).

Desarrolla tus destrezas

Ejercitación

2 Escribe el conjugado de cada expresión.

a. $7\sqrt{2} + 6\sqrt{3}$

b. $-5\sqrt{5} + 2\sqrt{2}$

c. $\sqrt{a-1} - \sqrt{a+1}$

d. $1 + \sqrt{m+1}$

e. $-\sqrt{x} - 3$

f. $2\sqrt{2} + 3\sqrt{3}$

3 Racionaliza cada expresión.

a. $\dfrac{4ab}{\sqrt[3]{x^2y^3z^3b}}$

b. $\dfrac{h}{\sqrt{x+h} - \sqrt{x}}$

c. $\dfrac{m^3n\sqrt{x}}{\sqrt[5]{2^4m^7n^6x}}$

d. $\dfrac{\sqrt{m+1}}{1 - \sqrt{m+1}}$

e. $\dfrac{3ab^2}{\sqrt{ab^5}}$

f. $\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1} - x}$

g. $\dfrac{\sqrt{1+x}}{\sqrt{1-x}}$

h. $\dfrac{2}{\sqrt{2+\sqrt{2}} - \sqrt{2}}$

i. $\dfrac{3-\sqrt{a}}{\sqrt{a}-2}$

j. $\dfrac{\sqrt{x+1} + \sqrt{x-1}}{\sqrt{x-1} + \sqrt{x+1}}$

Razonamiento

4 Halla el factor racionalizante para cada radical.

a. $\sqrt[3]{\dfrac{x^2y}{m^2}}$

b. $\sqrt{\dfrac{5}{49}m^2np^2}$

c. $\sqrt{\dfrac{5}{3}a^6b}$

d. $\sqrt[3]{5x}$

e. $\sqrt[3]{\dfrac{1}{2}m^2n}$

f. $\sqrt[3]{\dfrac{3}{4}xy^3z^2}$

g. $\sqrt[3]{4\pi^2x}$

h. $\sqrt[3]{4wz^6}$

5 Relaciona cada binomio con su conjugado.

a. $\sqrt{5} + 3$	$5 + \sqrt{3}$
b. $\sqrt{5} + \sqrt{3}$	$\sqrt{2a} - \sqrt{3b}$
c. $5 - \sqrt{3}$	$2a + \sqrt{3b}$
d. $\sqrt{2a} + \sqrt{3b}$	$\sqrt{5} - 3$
e. $\sqrt{2a} - 3b$	$2\sqrt{y} + \sqrt{3x}$
f. $2a - \sqrt{3b}$	$\sqrt{2a} + 3b$
g. $\sqrt{3x} - 2\sqrt{y}$	$\sqrt{5} - \sqrt{3}$

6 Escribe F si la proposición es falsa o V si es verdadera.

a. Racionalizar significa eliminar todos los radicales de una expresión.

b. Solo las expresiones con radicales de índice 2 se pueden racionalizar.

c. El factor racionalizante es una expresión que permite eliminar un radical.

d. El conjugado de un binomio es otro binomio con signos negativos.

e. El factor racionalizante de $\sqrt[8]{\dfrac{6^2f^3x}{16dm^2}}$ es $\sqrt[8]{\dfrac{6^6f^5x^7}{16d^7m^6}}$.

f. El conjugado de $-3x + \sqrt{2}$ es $3x - \sqrt{2}$.

g. La expresión $\dfrac{3}{\sqrt{3}}$ es equivalente a $\sqrt{3}$.

Resolución de problemas

7 Calcula el área del triángulo de la Figura 1 y racionaliza el resultado que obtengas.

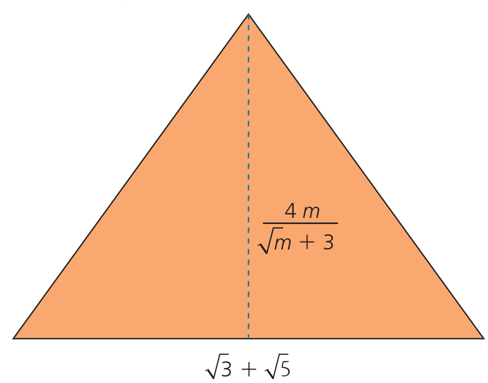


Figura 1

8 En la Figura 2 se observa un trapecio con base mayor B, base menor b y área A. ¿Qué expresión determina la altura h del trapecio? Racionaliza el resultado.

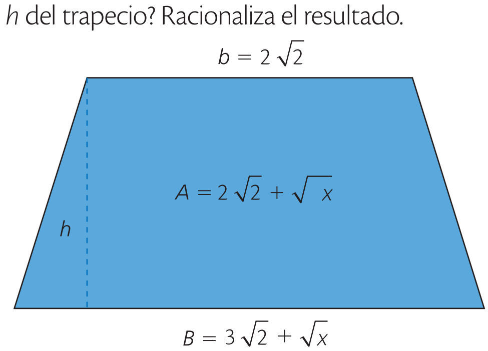


Figura 2

9 El periodo T de un péndulo de longitud l está dado por la expresión: $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{l}{g}}$ donde g es la constante gravitacional de valor $g = 10\ m/s^2$. Según esto, ¿cuál es el periodo de un péndulo de 1 m de longitud? Racionaliza la respuesta.

Números racionales y números irracionales

Comunicación

1. Completa la siguiente tabla.

Fracción	Decimal	Clasificación
$-\frac{48}{56}$		
$\frac{23}{20}$		
$\frac{5}{55}$		

Tabla 1

2. Ubica cada conjunto de números en la recta numérica y ordénalos de menor a mayor.

a. π; $-1,\overset{\frown}{6}$; $\frac{1}{2}$; 2,6; $-\sqrt{3}$; $-1,4$

b. $-\pi$; $-\frac{4}{10}$; $-2\sqrt{2}$; $2\sqrt{3}$; $2\sqrt{2}$

c. $-2,0$; $\frac{\sqrt{2}}{2}$; $-\sqrt{3}$; 1,8

Números reales

Comunicación

3. Da ejemplos de números según la condición:

a. Enteros y naturales

b. Racionales y enteros

c. Reales e irracionales

d. Enteros negativos y naturales

4. Representa en la recta numérica los siguientes intervalos.

a. $|x| \leq 2\sqrt{2}$

b. $-7 \leq x < -\sqrt{2}$

c. $[-\pi, 2\pi)$

d. $\left[-\sqrt{2}, 1,\overline{9}\right]$

Resolución de problemas

5. Resuelve cada situación. Expresa la solución utilizando dos cifras significativas por exceso y por defecto, y encuentra la mejor aproximación.

a. Halla el área.

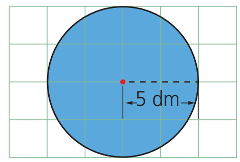


Figura 1

b. Halla el perímetro.

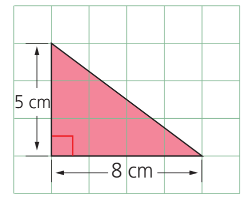


Figura 2

Potencias con exponente entero

Ejercitación

6. Calcula las siguientes potencias.

a. $5^3 \cdot 5^8 \div (5^2 \cdot 5^4)$

b. $5^{-3} \cdot 5^8 \div (5^{-2} \cdot 5^4)$

c. $\frac{2^{-5} \cdot 3^5 \cdot 5^{-2}}{2^7 \cdot 3^7 \cdot 5^{-6}}$

d. $\frac{2^{-5} \cdot 3^5}{2^7 \cdot 3^7} + \frac{2^2 \cdot 3^7}{2 \cdot 3^4}$

e. $\frac{m^{-n} \cdot l^5 \cdot n^{-2}}{m^{2n} \cdot n^2 \cdot l^5}$

f. $\left(\frac{2^{-n}}{2^m} - \frac{\left(2^3\right)^{-5}}{2^7}\right)^n$

g. $\frac{y^{-3} \cdot z^4 \cdot w^{-2}}{y^2 \cdot z^2 \cdot w^3}$

h. $\frac{5^3 \cdot 3^4}{3 \cdot 4^2} + \frac{5^2 \cdot 4^7}{9 \cdot 4^5}$

Radicales

Ejercitación

7. Halla el resultado de cada operación. Simplifica los radicales cuando sea necesario.

a. $\sqrt[3]{4} \cdot 4^{\frac{1}{3}} + \sqrt[5]{4} \cdot 4^{\frac{3}{5}}$

b. $2\sqrt{8} + 3\sqrt{18} - 2\sqrt{16} + 5\sqrt{32}$

c. $\sqrt[3]{3} + 2\sqrt[3]{24} - 5\sqrt[3]{81} - \sqrt[3]{64}$

d. $6 + 5\sqrt{27} - (-15) + 2\sqrt{8} + 4\sqrt{12}$

e. $2 + 4\sqrt{8} - (-30) + 2\sqrt{8} + 4\sqrt{18}$

8. Racionaliza las siguientes expresiones.

a. $\frac{4}{\sqrt{7}}$

b. $\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{6}}$

c. $\frac{2\sqrt{5}}{3\sqrt{6}}$

d. $\frac{2\sqrt{8}}{\sqrt{27}}$

e. $\frac{2+\sqrt{8}}{3\sqrt{3}}$

f. $\frac{2}{3+\sqrt{6}}$

g. $\frac{2}{\sqrt{x}}$

h. $\frac{2\sqrt{n}}{\sqrt{m}}$

i. $\frac{2+\sqrt{n}}{\sqrt{2}}$

Resolución de Problemas

Estrategia: Seguir un método

Problema

Observa algunas potencias de x.

$x^0 = 1, x^1 = x, x^2 = -1, x^3 = -x, x^4 = 1, x^5 = x, x^6 = -1$

¿Cómo calcularías potencias de x con exponentes grandes como x^{60} o x^{75}?

1. Comprende el problema

- ¿Qué información proporciona el enunciado?
  R: Se dan las seis primeras potencias de x.
- ¿Qué debes encontrar?
  R: Una forma sencilla de calcular potencias grandes de x

2. Crea un plan

- Observa el comportamiento de las potencias de x y encuentra una regularidad que te permita hacer una generalización.

3. Ejecuta el plan

- Los valores se repiten de cuatro en cuatro, por eso busca la forma de expresar el exponente en forma de producto, en el cual cuatro sea un factor.
- Si tienes x^{60}, entonces calculas:

$$60 \div 4 = 15, \text{ luego, } 60 = 4 \cdot 15$$

Así, el exponente puede expresarse como:

$$(x^4)^{15} = (1)^{15} = 1$$

- Si tienes x^{75}, entonces calcula:

$$75 = 4 \cdot 18 + 3$$

Por lo tanto, puede expresarse como:

$$x^{75} = (x^4)^{18} \cdot x^3 = 1 \cdot (-1) = -1.$$

R:Se divide el exponente entre 4 y se aplican las propiedades de la potenciación.

4. Comprueba la respuesta

- Verifica que:

$x^{45} = x$

$x^{84} = 1$

$x^{90} = -1$

Aplica la estrategia

1. Observa el producto de $(a + bx)(a - bx)$.

$$(a + bx)(a - bx) = a^2 - abx + abx - (bx)^2$$
$$= a^2 - b^2x^2$$
$$= a^2 + b^2$$

Encuentra una generalización para el resultado de la expresión $(a + bx)^2$.

a. Comprende el problema

....

b. Crea un plan

....

c. Ejecuta el plan

....

d. Comprueba la respuesta

....

Resuelve otros problemas

2. Una bacteria se reproduce duplicándose cada hora. Si inicialmente hay dos bacterias, ¿qué expresión permite calcular cuántas habrá luego de 2, 3, 4, 5 y 6 horas?

3. En la Figura 1 se muestra una circunferencia inscrita en un cuadrado de diagonal $5\sqrt{2}$.

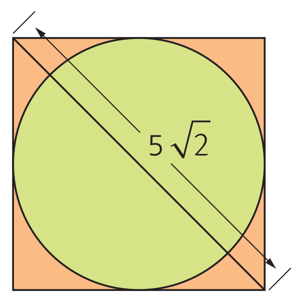


Figura 1

¿Cuál es el radio de la circunferencia?

Formula problemas

4. Inventa un problema que involucre la información de la Figura 2 y resuélvelo.

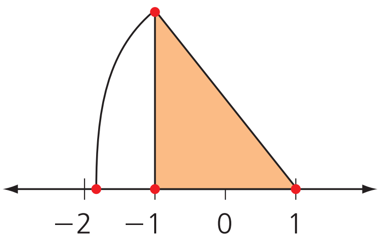


Figura 2

Prueba Ser Estudiante

A continuación se presentan ejercicios con cuatro alternativas de solución, de las cuales, una sola es la correcta. Señala en la tabla de respuestas, el literal que consideres correcto.

1. La expresión decimal del número racional $-\frac{3}{2}$ es:

A. 1,5

B. -1,5

C. 0,66

D. - 0,66

2. El conjunto de los números irracionales, reales y enteros, se simbolizan respectivamente con:

A. $\mathbb{R}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{Z}$

B. $\mathbb{Z}$, $\mathbb{I}$, $\mathbb{N}$

C. $\mathbb{I}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{Z}$

D. $\mathbb{N}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{Z}$

3. El valor absoluto de $|35 \cdot 2 \cdot -9|$, es:

A. – 629

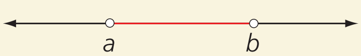
B. 629

C. – 630

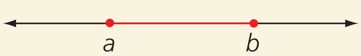
D. 630

4. La manera gráfica de representar un intervalo cerrado es:

A.



B.



C.



D.



5. Al resolver $4^2 \cdot -\left(\frac{6}{2}\right)^2 \cdot 12^{-2}$ se obtiene:

A. – 1

B. 2

C. 1

D. – 2

6. El diámetro de un electrón es de aproximadamente 0,000 000 000 000 4 cm, este valor expresado en notación científica es:

A. $4 \cdot 10^{13}$

B. $10 \cdot 4^{13}$

C. $4 \cdot 10^{-13}$

D. $10 \cdot 4^{-13}$

7. La relación entre el radio r de una esfera y su área total A es $r = \left(\frac{A}{4\pi}\right)^{\frac{1}{2}}$. ¿Cuál es el radio de una esfera que tiene un área total de 36π unidades cuadradas?

A. – 3

B. 3

C. 4

D. –4

8. Cerca de la superficie terrestre, el tiempo t que tarda un objeto en caer una distancia d, está dado por la expresión t=, $\frac{1}{4}d^{\frac{1}{2}}$ donde t se mide en segundos y d se mide en pies. El tiempo en segundos que tardará un objeto en caer 256 pies, es:

A. 4,00

B. 8,00

C. 0, 25

D. 2,50

Indicadores de logro:

- Expresa raíces como potencias con exponentes racionales y emplea las potencias de números reales con exponentes enteros para leer y escribir en notación científica información que contenga números muy grandes o muy pequeños.
- Identifica la representación gráfica de intervalos.

9. Calcula: $\sqrt{\frac{1}{64}m^{-10}b^{14}} \cdot \sqrt[3]{-64m^{9}b^{-6}}$

A. $-\frac{b^5}{2m^2}$

B. $-\frac{m^5}{2b^2}$

C. $-\frac{2^5}{bm^2}$

D. $-\frac{b^5}{m^2}$

10. El resultado de la suma $\sqrt{20} + \frac{1}{3}\sqrt{45} + 2\sqrt{125}$ es:

A. $5\sqrt{13}$

B. $13\sqrt{5}$

C. $3\sqrt{5}$

D. $5\sqrt{3}$

11. El factor racionalizante de $\sqrt[8]{\frac{6^2 f^3 x}{16dm^2}}$ es:

A. $\sqrt[8]{\frac{f^5x^7}{16d^7m^6}}$

B. $\sqrt[8]{\frac{6^6x^7}{16d^7}}$

C. $\sqrt[8]{\frac{6^6 f^5}{16d^7m^6}}$

D. $\sqrt[8]{\frac{6^6 f^5x^7}{16d^7m^6}}$

12. El valor de x en la expresión $121^{\frac{1}{2}} = x$, es:

A. 11

B. 9

C. 7

D. 5

13. El valor de x en la expresión $(-8)^{\frac{1}{x}} = -2 \quad = x$, es:

A. 8

B. 5

C. 3

D. 2

14. El valor de x en la expresión $x^{\frac{1}{2}} = 4$, es:

A. 2

B. 4

C. 8

D. 16

15. Al racionalizar el denominador en la expresión $\frac{2}{\sqrt{2}}$ se obtiene:

A. $\sqrt{2}$

B. 2

C. $\frac{\sqrt{2}}{2}$

D. $2\sqrt{2}$

Tabla de respuestas

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A
B	B	B	B	B	B	B	B	B	B	B	B	B	B	B
C	C	C	C	C	C	C	C	C	C	C	C	C	C	C
D	D	D	D	D	D	D	D	D	D	D	D	D	D	D

Construyendo la Cultura del Buen Vivir

¿Qué significa “inflación”?

La inflación es una medida económica que indica el crecimiento generalizado de los precios de los bienes, servicios y factores productivos en una economía en un periodo determinado.

La existencia de inflación durante un periodo implica un aumento sostenido del precio de los bienes en general, lo cual afecta la capacidad adquisitiva de la población, disminuyendo su capacidad de compra y por ende su calidad de vida.



SM Ediciones

> **“Un artículo que hace un año costaba $ 10 hoy puede costar $ 11 o más”**

Los Ecuatorianos vemos claramente cómo algunos de los productos, bienes o servicios de uso diario aumentan su precio. Es común escuchar que la gente compra los mismos productos en el mercado, pero paga una mayor cantidad de dinero de un mes a otro.



INEC. (2015). Inflación mensual. Recuperado de: www.ecuadorencifras.gob.ec

El Índice de Precios al Consumidor (IPC)

El aumento de los precios causado por la inflación se determina a partir de índices que miden el crecimiento promedio porcentual de la canasta familiar. El más utilizado para medir la inflación es el Índice de Precios al Consumidor, comúnmente conocido como IPC. Este indica, porcentualmente, la variación en el precio promedio de los bienes y servicios que adquiere un consumidor típico, (tiene como referencia los productos de la canasta familiar).

La deflación es el fenómeno contrario a la inflación

La deflación es la caída generalizada del nivel de los precios de los bienes y los servicios que conforman la canasta familiar.

Por lo general, la deflación es causada por la disminución de la demanda, lo cual representa un problema mucho más grave que la inflación, pues esta caída significa una caída general de la economía.

Desarrolla tus destrezas

Planeación económica y financiera

1. Lee el siguiente texto.

El IPC es el índice más usado para medir la inflación, aunque no puede considerarse como una medida absoluta porque solo representa la variación de precios efectiva para los hogares o familias.

Los grandes accionistas, las empresas o los gobiernos consumen bienes diferentes a los de la canasta familiar y, por tanto, el efecto de la inflación actúa diferente sobre ellos. Los factores de ponderación para los gastos de los hogares, o de presupuestos familiares, se obtienen mediante encuestas. En el IPC no están ponderadas ni incluidas otras transacciones de la economía, como los consumos intermedios de las empresas, ni las exportaciones, ni los servicios financieros. Pero dado que no hay una forma exacta de medir la inflación, el IPC (que se basa en las proporciones de consumo de la población) se considera generalmente como el índice oficial de inflación.

¿Qué causa la inflación?

Existen diferentes explicaciones sobre las causas de la inflación; de hecho, existen diversos tipos de procesos económicos que la producen. A continuación se presentan tres posibles causas:

1

Inflación de demanda

Cuando la demanda de bienes aumenta, sin que el sector productivo haya tenido tiempo de adaptar la cantidad de bienes producidos a la demanda existente.

2

Inflación de costes

Cuando el coste de la mano de obra o las materias primas se encarece y, para mantener los beneficios, los productores incrementan los precios.

3

Inflación autoconstruida

Cuando se prevé un fuerte incremento de precios y los productores comienzan a ajustar estos precios desde antes para que el aumento sea gradual.

¿Por qué es importante tener una inflación baja y estable?

Las decisiones económicas más importantes que toman los individuos y las empresas son, usualmente, decisiones a largo plazo: construir una fábrica, fundar una empresa, educarse o comprar vivienda. Estas decisiones dependen fundamentalmente del grado de incertidumbre en el futuro. Una inflación baja y estable es un indicador de estabilidad macroeconómica que contribuye a que las personas y las empresas tomen decisiones de inversión con confianza.


SM Ediciones

Una inflación baja:

- Promueve el uso eficiente de los recursos productivos.
- Disminuye la incertidumbre.
- Incentiva la inversión.
- Evita redistribuciones arbitrarias del ingreso y la riqueza, especialmente las que afectan a la población más pobre.

Pregunta tipo Saber

Ana acostumbra a hacer sus compras en el mismo lugar todos los meses.

Ella lleva un registro estricto de lo que gasta mes a mes y compara los precios de los productos que compra. Estos son los gastos en los últimos tres meses:


SM Ediciones

Marzo	Abril	Mayo
$ 325	$ 346	$ 341

Con relación a los datos registrados se puede afirmar que:

A. Entre marzo y abril el mercado subió aproximadamente 6,36%.

B. Entre abril y mayo el mercado bajó aproximadamente 5%.

C. Entre marzo y mayo el mercado subió aproximadamente 7%.

D. Entre abril y mayo el mercado subió un 3%.

2 Elabora una lista en la cual incluyas cinco bienes y tres servicios que se consuman en tu casa.

a. Pide a tus papás que te cuenten el valor que han pagado mes a mes, durante los últimos cuatro meses, por cada uno de los bienes y servicios que incluiste en la lista.

b.Calcula la diferencia de cada valor mes a mes.

c. Elabora una tabla en Excel en donde registres los datos, y escribe si el bien o el servicio aumentó o disminuyó.

Trabajo en grupo

Administración de recursos

3 Analicen la información de la gráfica de Evolución de la Canasta Vital e Ingreso Familiar (los valores están expresados en dólares).
Para ello:

a. Determinen el incremento del ingreso familiar desde junio de 2013 hasta junio de 2015.

b. Determinen el incremento del costo de la Canasta Familiar Vital desde junio de 2013 hasta junio de 2015.

c. Indiquen, según la gráfica, si ha existido algún mes en el que el costo de la Canasta Familiar Vital ha sido mayor al Ingreso Familiar.

Habilidades digitales

Justifica tu aprendizaje con una infografía de Easel.ly

Es muy útil transmitir información de forma atractiva por medio de una infografía, que es una representación visual de lo que quiere comunicarse. Easel.ly es el sitio web que te permite hacer infografías divertidas de forma simple y eficiente.

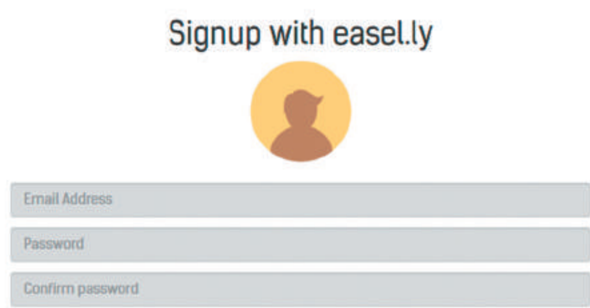
- Crea con tus compañeros una infografía en Easel.ly.

1 Ingresa a Easel.ly y regístrate

a. Con ayuda de tu navegador de preferencia, ingresa a www.easel.ly .

b. Da clic sobre Sign Up Free y diligencia los datos solicitados.

c. Oprime la opción "Start fresh" Start fresh para crear una infografía nueva.

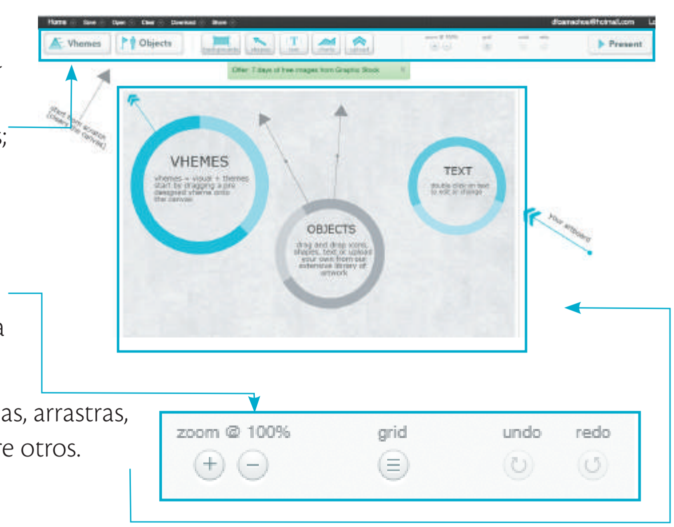


2 Reconoce el entorno de Easel.ly

a. Barra de menús de edición: encontrarás los menús *Vhemes* o temas visuales; *Objects* u objetos relacionados con una variedad de categorías; *Backgrounds* o fondos; *Shapes* o formas; *Text* o textos; *Charts* o gráficos y *Upload* para subir imágenes propias.

Además, encontrarás botones para hacer *zoom* al lienzo, poner una cuadrícula y deshacer y rehacer la última modificación en la zona de trabajo.

b. Zona de trabajo o lienzo: lugar en el cual tomas, arrastras, ubicas y editas los objetos, formas, textos, entre otros.



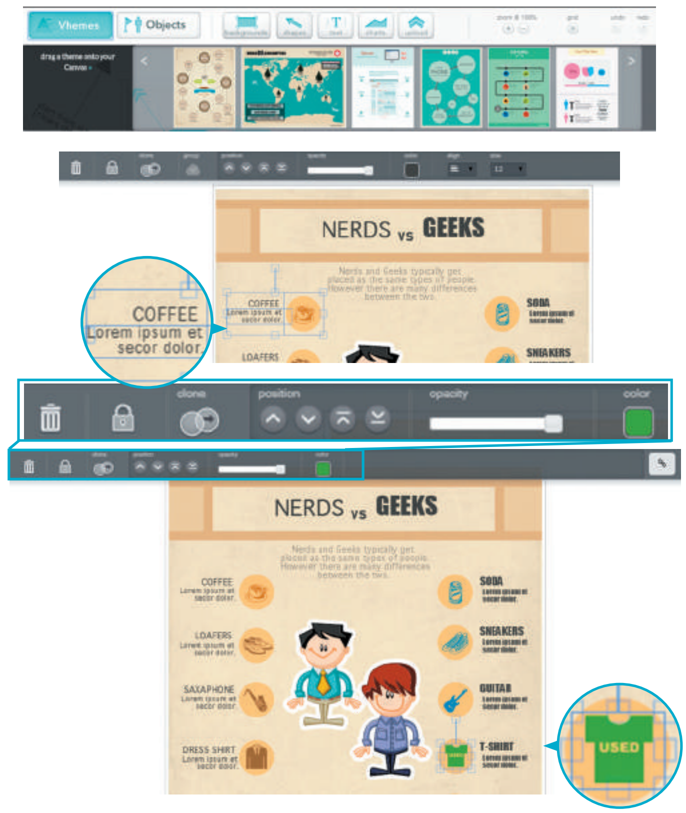
3 Planifica tu infografía

a. Busca información acerca de las aplicaciones de los vectores en la vida cotidiana, a nivel científico o industrial (documentos, imágenes, videos, etc.).

b. Selecciona una sola aplicación de los vectores y escribe dos párrafos en los que justifiques su importancia en la vida de los seres humanos.

c. Elabora un borrador del esquema general para presentar la aplicación seleccionada, por ejemplo, en forma de ruta o camino, cuadrantes, imagen central rodeada de textos cortos o mapa, entre otros.

4 Crea una infografía en Easel.ly



a. Da clic sobre el menú *Vhemes* y selecciona el tema visual que más se ajuste a tu esquema. Arrástralo al lienzo para comenzar a trabajar en él.

b. Edita cada texto según tus preferencias. Para hacerlo, da clic sobre el texto, escribe información corta, clara y concisa, y modifica la forma, la posición, el color, la alineación, el tipo y el tamaño de letra.

c. Edita los objetos, las formas o las imágenes. Da clic sobre el que quieras editar para eliminarlo, duplicarlo o modificar su posición y transparencia.

d. Incluye otros objetos, formas o gráficos desde Easel.ly. Da clic sobre Objects , shapes o charts (según sea el caso), selecciona los que desees arrastrándolos al lienzo. Luego, repite el proceso anterior para editarlos.

e. Oprime el botón Present para ver el progreso de tu infografía.

5 Descarga tu infografía en PDF



a. Da clic sobre el botón "Download" y escoge la opción "PDF".

b. Espera unos minutos. Puedes observar el progreso de descarga en la parte inferior izquierda de la pantalla 1433743387.pdf .

c. Una vez finalizada la descarga, da clic sobre el archivo y observa cómo quedó tu infografía.

Aprende más

Cambia el fondo de tu infografía.

a. Da clic sobre el menú backgrounds .

b. Selecciona y arrastra el fondo de tu elección al lienzo.

c. Repite el proceso del paso 4 y del paso 5.



Evaluación de la unidad

Números racionales y números irracionales

Razonamiento

1. Relaciona cada número con su respectiva clasificación.

a. $\frac{4}{99}$	•Decimal periódico puro
b. $\sqrt{13}$	•Decimal finito
c. $-\frac{3}{35}$	•Decimal periódico mixto
d. $\sqrt{262{,}44}$	•Decimal infinito no periódico

2. Determina la expresión decimal de cada fracción y clasifica el número decimal según corresponda.

a. $-\frac{8}{5}$

b. $\frac{19}{13}$

c. $\frac{11}{12}$

d. $\frac{27}{9}$

Números reales

Ejercitación

3. Compara los números dados en cada caso. Escribe $=$, $<$ o $>$, según corresponda.

a. $\frac{\pi}{4}$ ☐ $0{,}8$ b. $\sqrt{361}$ ☐ 19

c. $\sqrt{3}$ ☐ $1{,}73$ d. $-\sqrt{5}$ ☐ $-2{,}24$

e. 9 ☐ $\sqrt{80}$ f. $-\sqrt{7}$ ☐ $-\frac{13}{5}$

g. $\frac{49}{20}$ ☐ $2{,}45$ h. $-\frac{5}{9}$ ☐ $-\frac{10}{18}$

Razonamiento

4. Determina si las afirmaciones son verdaderas (V) o falsas (F).

a. Existen infinitos números irracionales. ( )

b. Todo número decimal es un número real. ( )

c. La expresión $-\frac{7}{0}$ es un número real. ( )

d. El número 0 es racional. ( )

e. Entre dos números racionales siempre existe un número irracional. ( )

f. Ningún número racional es irracional. ( )

5. Aplica las propiedades de los números reales y determina si la siguiente igualdad siempre se cumple.

$$\frac{ab + ac}{a} = b + c$$

Justifica tu respuesta.

La recta real

Modelación

6. Relaciona las expresiones equivalentes.

a. $x < -3$	• $(-\infty, 10]$
b. $5 + x \geq -3$	• $[-8, \infty)$
c. $x - 10 \leq 0$	• $(-\infty, -6)$
d. $x + 3 < -3$	• $(-\infty, -3)$

Razonamiento

7. Comprueba si la expresión $|a + b| \leq |a| + |b|$, conocida como desigualdad triangular, es válida para números racionales e irracionales. Luego, determina los valores que pueden tomar a y b.

Indicadores de logro:

- Establece relaciones de orden en el conjunto de los números reales, aproxima a decimales, aplica las propiedades algebraicas de los números reales en el cálculo de operaciones (adición, producto, potencias, raíces) y la solución de expresiones numéricas (con radicales en el denominador).
- Expresa raíces como potencias con exponentes racionales y emplea las potencias de números reales con exponentes enteros para leer y escribir en notación científica información que contenga números muy grandes o muy pequeños.
- Utiliza las distintas notaciones para los intervalos y su representación gráfica.

Potencias con exponente entero

Razonamiento

8. Selecciona la expresión que se obtiene al simplificar la fracción $\frac{\left[x^2 y^{-4}(-z^3)^{-2}\right]^{-3}}{x^6 y^{-3} z^7}$.

a. $-\frac{1}{x^{12} y^9 z^{13}}$ b. $-\frac{1}{y^9 z^{25}}$

c. $x^{12} y^9 z^{13}$ d. $x^{12} y^9$

Resolución de problemas

9. En matemáticas financieras, la expresión $F = p(1 + i)^n$ determina el valor futuro F de una cantidad inicial p a una tasa de interés por periodo i dentro de n periodos. Si se depositan en una cuenta $ 350 000 a un interés de 0,25 %, determina el valor futuro después de tres años.

Notación científica

Razonamiento

10. Lee y resuelve.

La distancia en el espacio se mide en años luz. Un año luz es la distancia que recorre un rayo de luz en un año. Si la velocidad de la luz es de aproximadamente 300 000 m/s, determina los metros recorridos en un año luz.

Ejercitación

11. Elige la expresión que resulta de expresar, en miligramos, la masa de un protón ($1{,}68 \cdot 10^{-27}$ kg).

a. $1{,}68 \cdot 10^{-21}$ mg b. $1{,}68 \cdot 10^{-34}$ mg

c. $1{,}68 \cdot 10^{-33}$ mg d. $1{,}68 \cdot 10^{-20}$ mg

Radicales

Ejercitación

12. Selecciona la respuesta correcta.

El perímetro de un cuadrado cuyo lado mide $5\sqrt{7}$ cm es:

a. $20\sqrt{7}$ cm b. $20\sqrt{28}$ cm

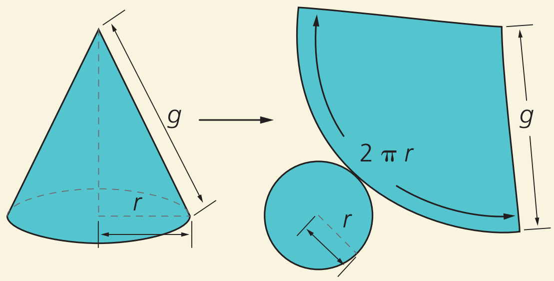
c. $25\sqrt{7}$ cm d. 175 cm

Radicales semejantes

Modelación

13. Resuelve.

El área total de un sólido es la suma de todas las áreas de sus caras. En un cono, el área total se determina a partir de la expresión $A_T = \pi r g + \pi r^2$.

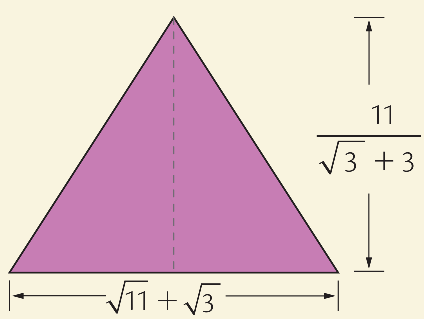


Determina la expresión del área lateral de un cono si su generatriz mide 6 cm y el diámetro de su base $\sqrt{3x}$ cm.

Racionalización

Razonamiento

14. Elige la expresión que determina el área del triángulo.



a. $\frac{(11\sqrt{3})(\sqrt{3}-3)}{12}$ b. $\frac{\sqrt{33}+3\sqrt{3}}{9}$

c. $\frac{(\sqrt{11}+\sqrt{3})(\sqrt{3}+3)}{12}$ d. $\frac{11(\sqrt{11}+\sqrt{3})(\sqrt{3}-3)}{-12}$

Comunicación

15. Determina las diferencias que se pueden establecer en las expresiones $\frac{1}{\sqrt{3x}-2x}$ y $\frac{\sqrt{3x}+2x}{x(3-4x)}$.

Justifica tu respuesta.

2

Funciones lineales

BLOQUE

Álgebra
y funciones

Las funciones y sus gráficas permiten comunicar información de modo preciso y sencillo; constituyen importantes herramientas mediante las cuales es posible modelar e interpretar diversas situaciones de la ciencia, la medicina y la ingeniería, entre otras áreas del conocimiento.

- Averigua qué tipo de fenómenos se pueden modelar mediante funciones lineales y da tres ejemplos.



Cultura del Buen Vivir

La fortaleza

Cuando se tiene fortaleza, se puede vencer el temor y los obstáculos que atentan contra nuestros propósitos personales.

- La fortaleza está relacionada directamente con la perseverancia y la constancia. Explica por qué.

Aprenderás...

- Concepto de función
- Funciones crecientes, decrecientes y simétricas
- Funciones lineal y afín
- Relación entre las pendientes de rectas paralelas y perpendiculares

Resolución de problemas

Recursos digitales

LTIC

AI

E



La ciencia de atarse los zapatos

La sabiduría popular ha dado en la clave cuando se trata de atarse los zapatos de la forma más fuerte y por tanto más segura, según el matemático australiano Burkard Polster; sin embargo, la forma más eficiente es otra. Polster ha analizado desde el punto de vista de la eficiencia las diversas formas de conseguir que el zapato sujete el pie convenientemente mediante un cordón y los típicos ojetes, y concluye que el cruce continuo o zigzag de ambos extremos del cordón, o el zigzag de un solo extremo que se une al final con el otro (las dos formas más utilizadas en el mundo) son efectivamente seguras.

No obstante, si solo se dispone de un cordón corto, estas dos soluciones no resultan las mejores por su baja eficiencia. De entre todas las otras formas de atarse los zapatos —que Polster ha estudiado y explica en la revista *Nature*—, la que consume menos longitud del cordón es la que denomina 'de pajarita', que consta de tres elementos: extremo, cruce y paso. Cuando el número de pares de ojetes es par solamente existe una forma de efectuar este tipo de atado. Cuando es impar hay un número más elevado de soluciones, que es el que indica la sencilla fórmula $\frac{n+1}{2}$ [...]

Estos cálculos permiten asegurar que los dos métodos tradicionales maximicen la tensión horizontal total al tirar de los extremos en la mayor parte de los zapatos, dada la distancia entre ojetes.[...]

Ruiz de Elvira, Malen. (2002). La ciencia de atarse los zapatos. Recuperado de: http://elpais.com/diario/2002/12/05/sociedad/1039042804_850215.html

Actividades

Interpreta

1. ¿En qué consiste el método para atarse los zapatos que Burkard Polster ha denominado 'de pajarita'?

Argumenta

2. La fórmula que permite calcular el número de formas existentes para atarse los zapatos expresa una función lineal en función del número impar de ojetes que tiene el zapato. En esta función, ¿cuál es la variable independiente? ¿Y la dependiente?

Propón

3. Otros matemáticos se han ocupado de encontrar el número de maneras de atarse los zapatos. Consulta al respecto y discute tus averiguaciones con tus compañeros. Al finalizar, establezcan la relación entre este tema y las funciones.

1 Concepto de función

Explora

Considera estos conjuntos A y B:

$A = \{2, 3, 5, 6\}$ y $B = \{1, 2, 4, 9, 10\}$.

- Si x es un elemento de A **y** y, un elemento de B, puede definirse una relación R de A en B, mediante el enunciado: "y es múltiplo de x". ¿Cuáles son los elementos de R?

De acuerdo con su definición, la relación R hace corresponder a x, en A, algún elemento y, de B, siempre y cuando y sea múltiplo de x.

Por lo tanto, la relación está conformada por todas las **parejas ordenadas** de la forma (x, y) que cumplan la condición que define a R, así:

$$R = \{(2, 2), (2, 4), (2, 10), (3, 9), (5, 10)\}.$$

En general, una **relación** R, definida como un conjunto A en un conjunto B, es una correspondencia entre los elementos de dos conjuntos.

Cuando una relación dada entre dos conjuntos A y B asocia a cada elemento de A exactamente un elemento de B es denominada **función de A en B**.

Una **función** f es una relación definida de un conjunto A en un conjunto B, tal que a cada elemento de A le corresponde un único elemento de B mediante f.

Ten en cuenta

Todas las funciones son relaciones, pero no todas las relaciones son funciones.

Ejemplo 1

- En la Figura 1, se representa en un diagrama sagital la relación R_1 que hace corresponder a cinco personas sus respectivos números de celular. Se observa que esta relación no es una función, pues existe una persona asociada a dos números de celular; además, existe un elemento del primer conjunto que no se relaciona con algún elemento del segundo.

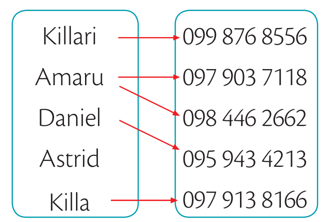


Figura 1

- Sean $A = \{2, 4, 6, 8\}$ y $B = \{1, 3, 5, 7\}$, y R_2 una relación definida mediante el enunciado: "x es el siguiente de y", siempre que x sea un elemento del conjunto A y y, un elemento del conjunto B.

  Se observa que la relación R_2 está dada por:

  $$R_2 = \{(2, 1), (4, 3), (6, 5), (8, 7)\}.$$

  De acuerdo con lo anterior, puede concluirse que esta relación es una función, pues no existen pares ordenados que tengan el mismo primer elemento y cada elemento del conjunto A está asociado a un único elemento del conjunto B.

1.1 Dominio y recorrido de una función

El **dominio de una función** f, denotado por **D(f)**, es el conjunto de todos los valores que toma la variable independiente x. **El rango o recorrido de una función** f, denotado por **R(f)**, es el conjunto de todos los valores que toma la variable dependiente y.

Ten en cuenta

El matemático suizo Leonhard Euler (1707-1783) dio una definición precisa de función e introdujo en 1734 el símbolo $f(x)$ para designar la imagen de x mediante una función f. Actualmente, también se acostumbra a escribir la expresión $y = f(x)$.

Ejemplo 2

Observa cómo se determinan el dominio y recorrido de la función $y = \dfrac{2}{x-1}$.

- Como la expresión de la función es un cociente, entonces estará definida para todo número real, excepto para aquel que anula el denominador. En este caso, el valor que anula el denominador es $x = 1$, por lo tanto, $D(f) = \mathbb{R} - \{1\}$.
- Para determinar el recorrido de la función, se despeja la variable x en términos de la variable y. Luego, se intercambian los nombres de las variables, con lo cual se obtiene la expresión $y = \dfrac{2+x}{x}$, que estará definida para todo número real, excepto para $x = 0$, es decir, $R(f) = \mathbb{R} - \{0\}$.

Destreza con criterios de desempeño: Definir y reconocer una función real identificando sus características: dominio, recorrido y cortes con los ejes,con el uso de la tecnología.

1.2 Representación gráfica de una función

La **representación gráfica de una función** $y = f(x)$ en el plano cartesiano consta de todos los puntos cuyas coordenadas se expresan mediante parejas ordenadas de la forma (x, y), que pertenecen a dicha función.

En la práctica, para representar una función se determinan las coordenadas de puntos asignando valores arbitrarios a la variable x, los cuales se reemplazan en la expresión algebraica de la función para obtener los valores correspondientes de la variable y. Luego se ubican los puntos en el plano cartesiano y se traza una línea que los una, según el análisis del dominio y del recorrido.

Actividad resuelta

Razonamiento

1 Obtén la gráfica de la función $f(x) = 3x - 1$.

Solución:

Para representar gráficamente la función, puede completarse una tabla de valores como la Tabla 1. En ella, se encuentran parejas de valores obtenidas al asignar a la variable x algunos valores del dominio de la función y reemplazarlos en la expresión $y = 3x - 1$ para obtener los valores correspondientes de la variable y. Como en este caso D(f) y R(f) coinciden con el conjunto $\mathbb{R}$, se traza una línea continua para unir los puntos (Figura 2).

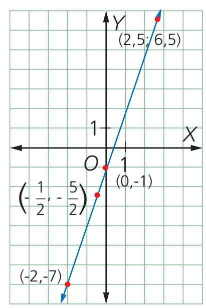


Figura 2

x	$f(x)$
-2	-7
$-\frac{1}{2}$	$-\frac{5}{2}$
0	-1
2,5	6,5

Tabla 1

Razonamiento matemático

Funciones y relaciones

Grafica las siguientes relaciones en el plano cartesiano.

$R_1: x^2 - y = 1$

$R_2: y^2 - x = 1$

- ¿Cuál de ellas NO representa una función? ¿Por qué?

MatemaTICS

Grafica funciones con WolframAlpha

Con WolframAlpha puedes obtener la gráfica de una función empleando la función *Plot*, de la siguiente manera:

- Una vez accedas al programa, ingresa en la caja de texto la expresión algebraica de la función. Por ejemplo, para graficar la función:

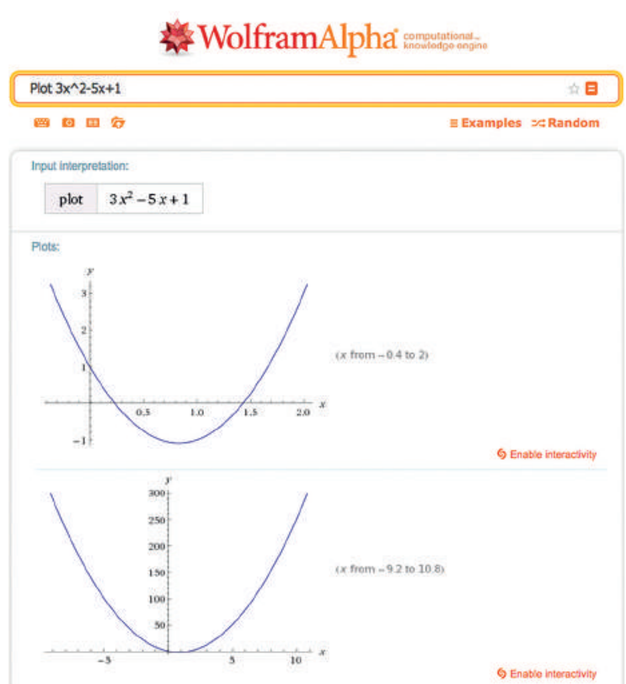
$$y = 3x^2 - 5x + 1,$$

se escribe:

Plot 3x^2−5x+1.

- Luego, oprime *Enter* y obtendrás la gráfica de la función representada con dos escalas diferentes, como se observa en la imagen de la derecha.





1 Concepto de función

Desarrolla tus destrezas

Razonamiento

2 Determina si cada relación representa una función. En el caso de las funciones, indica su dominio y su rango.

a.

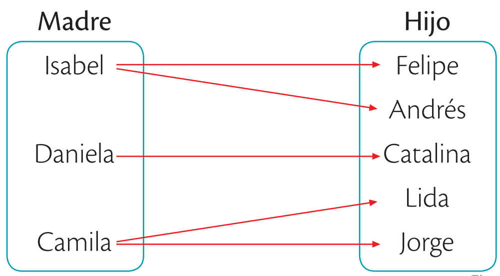


Figura 3

b.

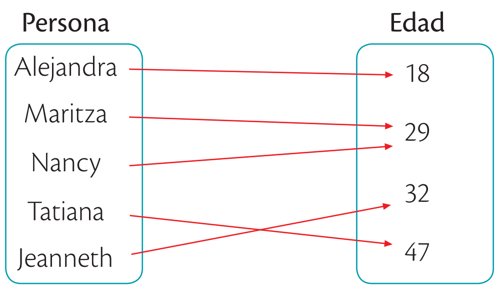


Figura 4

c.

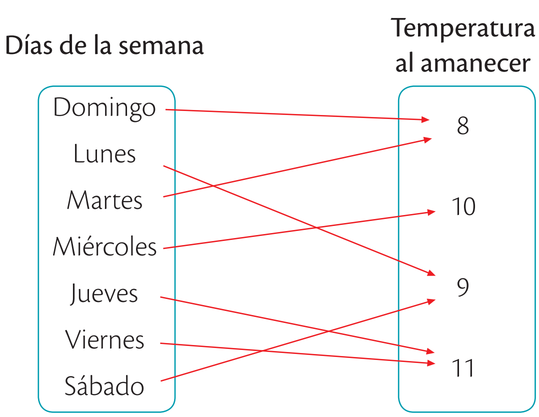


Figura 5

d. $R_1 = \{(2, 6), (-3, 6), (4, 7), (6, 8), (7, 9)\}$

e. $R_2 = \{(-4, 9), (-9, 4), (1, 7), (-4, 8), (3, 1)\}$

Modelación

3 Escribe la función que representa cada enunciado. En cada caso, determina la variable independiente y la variable dependiente.

a. El costo mensual del servicio de telefonía celular (C) es de \$ 0,10 por minuto más \$ 10 de cuota fija.

b. El salario neto (G) de una persona que gana \$ 10 por hora.

Comunicación

4 Completa la Tabla 2. Observa el ejemplo.

Función expresada mediante un enunciado	Función expresada mediante su expresión algebraica
Función que a cada número le asocia su triple.	$y = 3x$
Función que a cada número le asocia su doble menos 3.	
Función que a cada número le asocia su mitad.	
	$y = x^2$
Función que a cada número le asocia su opuesto aditivo.	
Función que relaciona el volumen de un cubo y su arista.	
	$y = 2x - 10$
Función que relaciona el radio de un círculo y su área.	
	$P(r) = 2\pi r$
El valor de y es igual a la tercera parte del valor de x disminuido en 8.	

Tabla 2

5 Halla el dominio y el rango de cada función.

a. $f(x) = 5x - 7$

b. $f(x) = \frac{1}{x}$

c. $f(x) = -2x^3 + 8x + 3$

d. $f(x) = \frac{12}{x - 5}$

e. $f(x) = \sqrt{x + 1}$

Razonamiento

6 Indica cuáles de las siguientes gráficas no corresponden a una función. Justifica tus respuestas.

a.

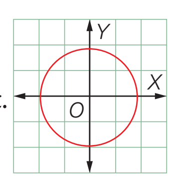


Figura 6

b.

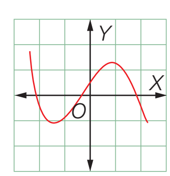


Figura 7

c.

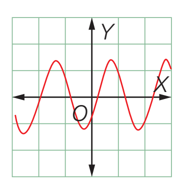


Figura 8

d.

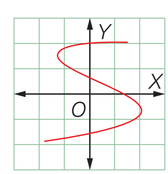


Figura 9

Destreza con criterios de desempeño: Definir y reconocer una función real identificando sus características: dominio, recorrido, cortes con los ejes.

Comunicación

7 Observa las gráficas de las funciones g y f de las Figuras 10 y 11. Luego, responde cada pregunta.

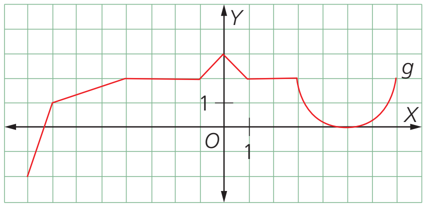


Figura 10

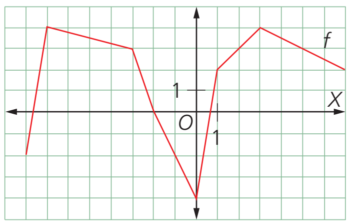


Figura 11

a. ¿Cuáles son los valores de $g(0)$ y $f(0)$?

b. ¿Es $f(0)$ positiva o negativa?

c. ¿Es $g(0)$ positiva o negativa?

d. ¿Cuáles son los valores de $g(5)$ y $f(5)$?

e. ¿Para qué valores de x, $f(x) = 0$?

f. ¿Para qué valores de x, $g(x) = 0$?

g. ¿Para qué valores de x, $f(x) = 4$?

h. ¿Para qué valores de x, $g(x) = 2$?

i. ¿Cuál es el dominio de f?

j. ¿Cuál es el rango de f?

k. ¿Cuál es el dominio de g?

l. ¿Cuál es el rango de g?

Ejercitación

8 Haz una tabla de valores y la gráfica para cada una de las funciones.

a. $y = x$

b. $f(x) = |x|$

c. $f(x) = -7x + 11$

d. $y = x^3$

e. $y = 1$

9 Considera la siguiente función: $f(x) = \dfrac{x+3}{x+1}$.

a. ¿Cuál es el dominio de f?

b. ¿Está el punto (1, 2) en la gráfica de f?

c. ¿Está el punto (−1, 0) en la gráfica?

d. Si $x = 4$, ¿a qué equivale $f(x)$?

e. Si $f(x) = \dfrac{3}{2}$, ¿cuál es el valor de x?

f. Si $f(x) = 0$, ¿cuál es el valor de x?

Modelación

10 Observa el ortoedro de la Figura 12 y resuelve.

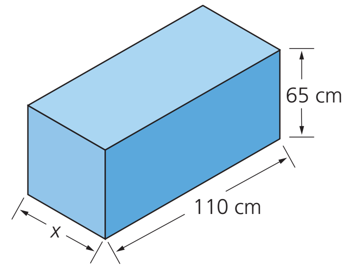


Figura 12

a. Escribe una función que relacione el volumen del ortoedro $V(x)$ con la medida de su ancho x.

b. Determina el volumen del ortoedro para las medidas de x dadas en la Tabla 3.

x	V(x)
15 cm	
20 cm	
25 cm	
30 cm	
35 cm	
40 cm	
45 cm	
50 cm	

Tabla 3

Resolución de problemas

11 Si una piedra cae al piso libremente desde una altura de 50 m, la altura h, en metros, al transcurrir x segundos es aproximadamente:

$$h(x) = 50 - 4{,}9x^2.$$

a. ¿A qué altura está la piedra cuando transcurre un segundo?

b. ¿A qué altura está la piedra cuando transcurren dos segundos?

12 En un local se disminuyen los precios de los artículos de la sección de electrodomésticos en un 10%.

Designa con x el precio de un artículo antes de la rebaja y con y el precio del mismo artículo después de la rebaja.

a. Completa la Tabla 4, según la información.

x	1 200		1 900			4 000	5 000
y		1 530		2 250	2 700		

Tabla 4

b. Escribe la función que representa la situación.

c. Realiza la gráfica correspondiente a la función.

2 Monotonía: funciones crecientes y funciones decrecientes

Explora

Observa la gráfica de la función f representada en la Figura 1.

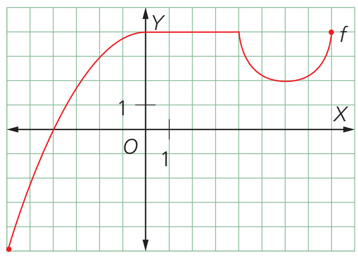


Figura 1

- ¿En qué intervalos crece la gráfica de f? ¿En cuáles decrece?

TECNOLOGÍAS de la información y la comunicación

www.e-sm.net/9smt03

Evalúa tus conocimientos sobre crecimiento y decrecimiento de funciones.

App

Funciones crecientes y funciones decrecientes

Abre la aplicación *Desmos Graphing Calculator* y utilízala para analizar el crecimiento, decrecimiento y simetría de funciones mediante gráficas, para representar funciones lineales y afines, y para relacionar ecuaciones, pendientes, puntos de corte y relaciones entre rectas.



En la gráfica de la función, se observa que:

- f es creciente en los intervalos $[-6, 0]$ y $[6, 8]$, pues los valores de y crecen en estos intervalos.
- f es decreciente en $[4, 6]$, ya que los valores de y decrecen en este intervalo.
- f es constante en el intervalo $[0, 4]$.

Una función f es **creciente** en un intervalo I cuando, para todo $a \in I$ y $b \in I$ con $a < b$, se cumple que $f(a) < f(b)$.

Una función f es **decreciente** en un intervalo I cuando, para todo $a \in I$ y $b \in I$ con $a < b$, se cumple que $f(a) > f(b)$.

Ejemplo 1

En la Figura 1 se observa que la gráfica de la función f no es estrictamente creciente ni estrictamente decreciente.

2.1 Tasa de variación

La **tasa de variación** de una función f, al pasar de un punto a a un punto b, está dada por la expresión: $TV[a, b] = f(b) - f(a)$.

Ejemplo 2

En la función $f(x) = 2x^3 - 9x^2 + 12x - 3$, cuando el valor de x pasa de 1 a 2, la tasa de variación se halla de la siguiente manera:

$$TV[1, 2] = f(2) - f(1) \Rightarrow TV[1, 2] = 1 - 2 = -1.$$

La tasa de variación de $f(x)$ en el intervalo $[1, 2]$ es -1.

2.2 Crecimiento y decrecimiento

Las definiciones de crecimiento y decrecimiento de una función pueden reformularse en términos de la tasa de variación de la siguiente manera.
Si la monotonía es constante se tiene que:

Una función es **creciente** en un intervalo si para todo par de valores a y b en el intervalo con $a < b$ su **tasa de variación es positiva**, $TV > 0$.

Una función es **decreciente** en un intervalo si para todo par de valores a y b en el intervalo con $a < b$ su **tasa de variación es negativa**, $TV < 0$.

Ejemplo 3

- La función $h(x) = 3x^2 - 1$ es **decreciente** en el intervalo $[-5, -2]$, porque la tasa de variación $TV[-5, -2] = -63$ y $-63 < 0$.
- La función $g(x) = x^5 + 2$ es **creciente** en el intervalo $[-4, -1]$, porque la tasa de variación $TV[-4, -1] = 1\,023$ y $1\,023 > 0$.

Actividad resuelta

Ejercitación

1. Determina si la función $f(x) = 2x^3 - 9x^2 + 12x - 3$ es creciente o decreciente en el intervalo $[0, 1]$.

Solución:
Se calcula la tasa de variación de la función f, así:

$$TV[0, 1] = f(1) - f(0) = 2 - (-3) = 5.$$

Como $5 > 0$, la función f es creciente en el intervalo $[0, 1]$.

Destreza con criterios de desempeño: Reconocer funciones crecientes y decrecientes a partir de su representación gráfica .

Desarrolla tus destrezas

Ejercitación

2 Observa las gráficas de las Figuras 2 a 5. Luego, indica en qué intervalos son crecientes o decrecientes.

a.

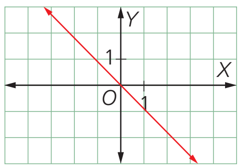


Figura 2

b.

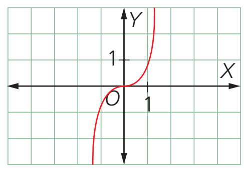


Figura 3

c.

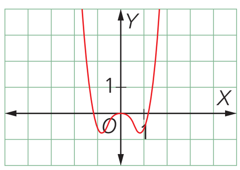


Figura 4

d.

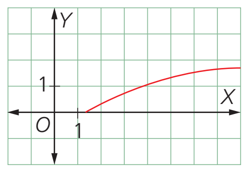


Figura 5

3 Calcula la tasa de variación de cada función en los intervalos dados.

a. $f(x) = 2x^2$

$TV[-3, 0]$ y $TV[1, 2]$

b. $g(x) = -9x^2 + 7x - 5$

$TV[2, 4]$ y $TV[-3, 0]$

c. $i(x) = 7$

$TV[-3, 5]$ y $TV[8, 15]$

Razonamiento

4 Clasifica las siguientes funciones en crecientes o decrecientes, según corresponda.

a. $g(x) = -5$

b. $h(x) = 2x + 4$

c. $j(x) = 2x$

d. $l(x) = 3$

e. $f(x) = -4x + 5$

5 Indica si son verdaderas o falsas estas afirmaciones:

a. La función $f(x) = x^3 - 3x^2 + 5$ es creciente en el intervalo $[0, 2]$.

b. La función $f(x) = 4x^3 + 2x^2 - 3$ es creciente en el intervalo $\left[-\frac{1}{2}, 1\right]$.

c. La función $f(x) = x + \frac{x}{4}$ es decreciente en el intervalo $[2, 6]$.

d. La función $f(x) = x^3 - 3x^2 + 5$ es decreciente en el intervalo $\left[-\frac{1}{2}, 0\right]$.

Comunicación

6 Describe los intervalos de crecimiento y decrecimiento de las funciones representadas en las siguientes gráficas.

a.

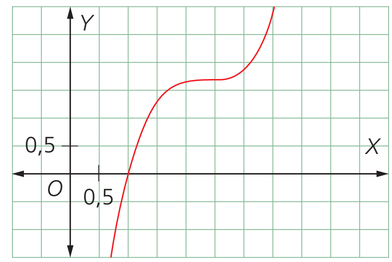


Figura 6

b.

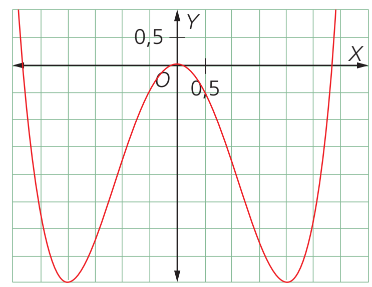


Figura 7

Razonamiento

7 Estudia el crecimiento y decrecimiento de la función $f(x) = 4x + x^2$ en los intervalos $[-2{,}2; -2]$ y $[-2; -1{,}8]$.

Resolución de problemas

8 Un jardinero quiere cercar un terreno de forma cuadrada y área desconocida en el que plantó unas flores. Encuentra la fórmula que permite obtener el lado del cuadrado en función de su área.

a. Si el área estuviera comprendida entre 120 m^2 y 180 m^2, ¿cuáles serían el dominio y el recorrido de la función?

b. ¿Es la función descrita creciente o decreciente?

9 En la gráfica de la Figura 8, se muestra la variación de la estatura de una persona en función de su edad, cada 5 años.

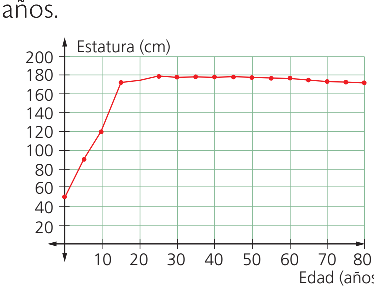


Figura 8

¿Entre qué edades la estatura de esta persona fue creciente? ¿Y cuándo fue decreciente?

3 Funciones simétricas

Explora

En la Figura 1, se muestra la gráfica de la función $g(x) = |2x| + 3$.

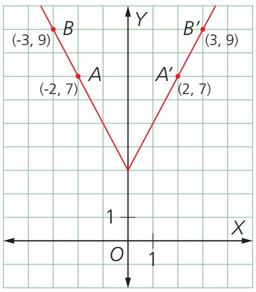


Figura 1

- ¿Qué clase de simetría presenta la función $g(x)$?

3.1 Simetría con respecto al eje de ordenadas. Funciones pares

En la figura se observa que:

- $f(-2) = f(2)$, luego, los puntos $A(-2, 7)$ y $A'(2, 7)$ son simétricos con respecto al eje de ordenadas.
- $f(-3) = f(3)$, luego, los puntos $B(-3, 9)$ y $B'(3, 9)$ son simétricos con respecto al eje de ordenadas.

Una **función** f es **simétrica con respecto al eje de ordenadas** si para cualquier punto x de su dominio se cumple que $f(x) = f(-x)$, es decir, si los puntos $P(x, y)$ y $P'(-x, y)$ son simétricos con respecto al eje de ordenadas. A las funciones con este tipo de simetría se les llama **funciones pares**.

Ejemplo 1

La función $f(x) = x^2 - 3$, representada en la Figura 2, es simétrica con respecto al eje Y. Es decir, $f(x)$ es una función par, porque:

$$f(-x) = (-x)^2 - 3 = x^2 - 3 = f(x).$$

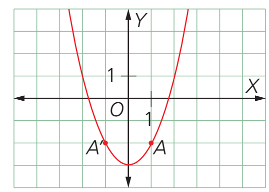


Figura 2

3.2 Simetría con respecto al origen. Funciones impares

Una **función** f es **simétrica con respecto al origen** si para cualquier punto x de su dominio se cumple que $f(-x) = -f(x)$, es decir, si los puntos $P(x, y)$ y $P'(-x, -y)$ son simétricos con respecto al origen. A las funciones con este tipo de simetría se les llama **funciones impares**.

Ejemplo 2

La función $g(x) = x^3$, que se observa en la Figura 3, es simétrica con respecto al origen. La función es impar, porque se cumple la siguiente igualdad:

$$g(-x) = (-x)^3 = -x^3 = -g(x).$$

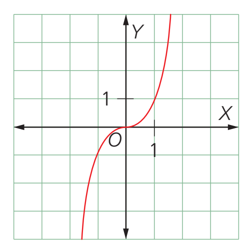


Figura 3

Ten en cuenta

Si una función es simétrica con respecto al eje de las ordenadas o con respecto al origen, basta con construir su gráfica en los puntos en donde $x \geq 0$. Por simetría, puede dibujarse el resto de la gráfica.

Actividad resuelta

Razonamiento

1. Estudia la simetría de la función $f(x) = \dfrac{2}{x}$ e indica si es par o impar.

Solución:

Al remplazar x por $(-x)$ en la expresión algebraica de f, se obtiene:

$$f(-x) = \frac{2}{-x} = -\frac{2}{x} = -f(x),$$

por lo tanto, f es simétrica respecto al origen y es una función impar. En la Figura 4, se observa la gráfica de f.

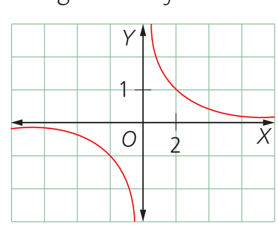


Figura 4

Destreza con criterios de desempeño: Definir y reconocer funciones pares e impares, con base a su formulación algebraica y/o representación gráfica.

Desarrolla tus destrezas

Ejercitación

2 Marca la opción correcta en cada caso.

a.

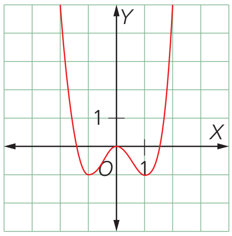


Figura 5

- Función par
- Función impar
- Ninguna de las anteriores

b.

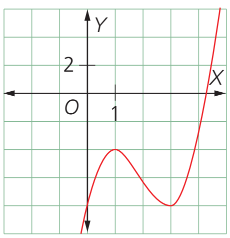


Figura 6

- Función par
- Función impar
- Ninguna de las anteriores

c.

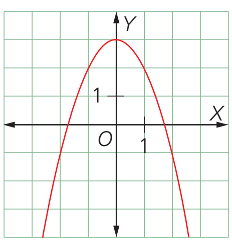


Figura 7

- Función par
- Función impar
- Ninguna de las anteriores

d.

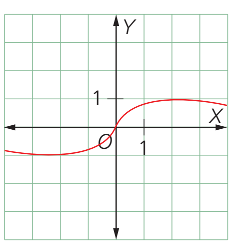


Figura 8

- Función par
- Función impar
- Ninguna de las anteriores

e.

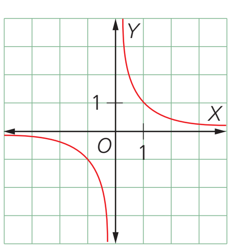


Figura 9

- Función par
- Función impar
- Ninguna de las anteriores

Razonamiento

3 Determina cuáles de las siguientes funciones son pares y cuáles, impares.

a. $f(x) = \dfrac{x^3}{x^3 + 3}$

b. $g(x) = x^2 + 4$

c. $h(x) = x^3 - 4x$

d. $i(x) = |x - 1|$

e. $j(x) = x^5 - x^3$

f. $k(x) = |x^5 - x^3|$

g. $p(x) = \dfrac{x^4 - 2}{3 - x^2}$

h. $q(x) = x^2 + x$

4 Indica si cada afirmación es verdadera (V) o falsa (F). Justifica tus respuestas.

a. La función $f(x) = x^4 - 3x^2 + 4$ es simétrica con respecto al eje de ordenadas.

b. La función $g(x) = 4x^5 - 3x^3$ es simétrica con respecto al origen.

c. La función $h(x) = \dfrac{x^4 + x^2 + 1}{x}$ es simétrica con respecto al origen.

d. La función $h(x) = |x|$ es simétrica con respecto al eje de ordenadas.

Modelación

5 Completa las gráficas, según el tipo de función que representa cada una.

a. Función impar

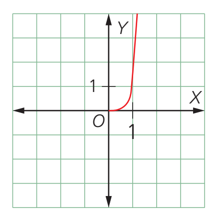


Figura 10

b. Función par

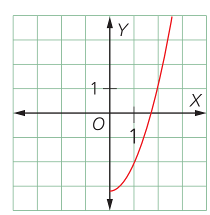


Figura 11

Resolución de problemas

6 La altura y, medida en kilómetros de un proyectil que se lanza desde cierto punto, puede expresarse mediante la función $f(x) = -0{,}125x^2 + 4$, donde x es el tiempor medido en horas.

a. Completa una tabla de valores en la que se relacionen las variables involucradas.

b. Haz la gráfica de la función.

c. ¿Presenta $f(x)$ simetría? ¿Es f par o impar?

4 Funciones lineal y afín

Explora

La arena contenida en un reloj de arena ocupa un volumen de 540 cm^3 y la velocidad de caída es de 9 cm^3 por minuto.



- ¿Cuánto tiempo transcurre para que haya la misma cantidad de arena en las dos partes del reloj?
- Elabora una gráfica que represente la situación.

Para analizar la situación, puede completarse una tabla que muestre la relación entre el tiempo transcurrido *t*, en minutos, y el volumen de la arena *V*, en centímetros cúbicos, que queda en la parte superior del reloj. Observa la Tabla 1.

t	1	10	20	30	40	50	60
V(t)	531 cm^3	450 cm^3	360 cm^3	270 cm^3	180 cm^3	90 cm^3	0 cm^3

Tabla 1

Al estudiar los datos, se encuentra que la relación entre *t* y *V* corresponde a una función. El tiempo transcurrido hasta el momento en el que la cantidad de arena es la misma en ambos lados del reloj es de 30 minutos.

La gráfica que representa la relación entre *t* y *V* puede observarse en la Figura 1 y corresponde a un segmento de recta, cuya expresión algebraica está dada por:

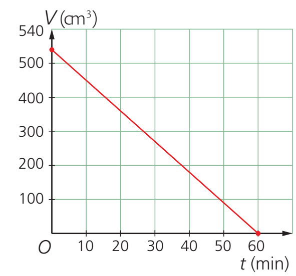


Figura 1

$$V(t) = 540 - 9t.$$

Muchos fenómenos físicos, científicos y de la vida cotidiana pueden modelarse mediante funciones cuya **expresión algebraica** es de **primer grado con una incógnita**.

4.1 Función lineal

Una **función lineal** es aquella cuya expresión algebraica es de la forma $\boldsymbol{f(x) = mx}$, siendo m un número real diferente de 0.

Algunas características de la función lineal $f(x) = mx$ son las siguientes:

- Su gráfica es una **línea recta** que pasa por el origen, es decir, por el punto (0, 0).
- El valor de $\boldsymbol{m}$ se llama **constante de proporcionalidad**. Si $m > 0$, la función es creciente y si $m < 0$, la función es decreciente.
- Su dominio y su rango coinciden con el conjunto $\mathbb{R}$.
- Es una función **continua**, es decir, no presenta saltos ni interrupciones en todo su dominio.

TIC TECNOLOGÍAS de la información y la comunicación

www.e-sm.net/9smt04

Amplía y practica lo que sabes acerca de la función lineal.

Ejemplo 1

El ICE (*Inter City Express*) es un tren de alta velocidad que conecta todas las ciudades principales de Alemania. Tiene conexiones internacionales a Dinamarca, los Países Bajos, Bélgica, Francia, Suiza y Austria. Uno de sus trenes lleva una velocidad media de 270 km/h. En la Tabla 2 se muestra la distancia *D* que recorre en función del tiempo *t*.

***t* (Tiempo en horas)**	1	2	3	4	5	...
***D*(*t*) (Distancia recorrida en km)**	270	540	810	1 080	1 350	...

Tabla 2

Esta situación puede modelarse por medio de la función $D(t) = 270t$, cuya gráfica es una línea recta que pasa por (0, 0), como se observa en la Figura 2. En este caso, la constante de proporcionalidad es 270.

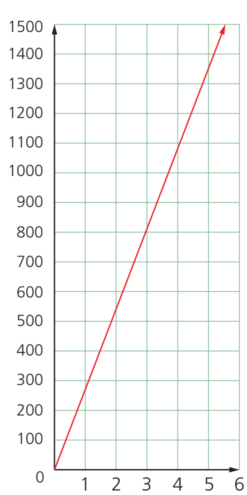


Figura 2

Destreza con criterios de desempeño: Definir y reconocer una función lineal de manera algebraica y gráfica (con o sin el empleo de la tecnología) e identificar su monotonía a partir de la gráfica.

4.2 Función afín

Una **función afín** es aquella cuya expresión algebraica es de la forma $\boldsymbol{f(x) = mx + b}$, siendo m y b números reales distintos de 0.

Las principales características de la función afín $f(x) = mx + b$ son:

- Su gráfica es una **línea recta** que pasa por el punto $(0, b)$. Este se denomina **punto de corte** con el eje de ordenadas.
- El número $\boldsymbol{m}$ se llama **constante de proporcionalidad**. Si $m > 0$, la función es creciente y si $m < 0$, la función es decreciente.
- Su dominio y su rango coinciden con el conjunto $\mathbb{R}$.
- Es una función **continua**.

4.3 Gráfica de una función afín

La **gráfica de la función afín** $f(x) = mx + b$ se obtiene al desplazar verticalmente (b unidades) la gráfica de la función $f(x) = mx$.

En la Figura 3, se observa que:

- Si $b > 0$, el desplazamiento es hacia arriba.
- Si $b < 0$, el desplazamiento es hacia abajo.

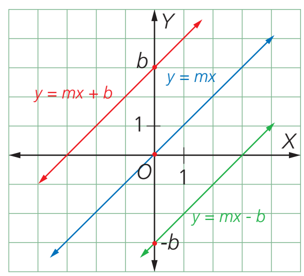


Figura 3

Ejemplo 2

En la Tabla 3, se muestran los valores asociados a la función afín $f(x) = 3x - 5$.

x	-3	-2	-1	0	1	2
$f(x)$	-14	-11	-8	-5	-2	1

Tabla 3

Al representar estos datos, se obtiene la gráfica de la Figura 4. Si se compara con la gráfica de la función lineal $g(x) = 3x$, se verifica que $f(x)$ es una traslación de $g(x)$ cinco unidades hacia abajo.

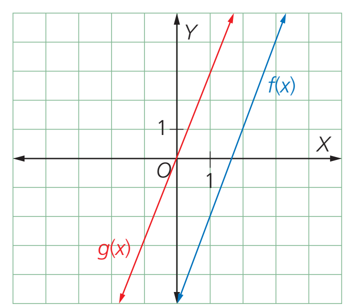


Figura 4

Actividad resuelta

Resolución de problemas

1 En cierto experimento se midió la temperatura de un líquido sometido a un aumento gradual de temperatura. Los datos se muestran en la Tabla 4.

Tiempo en minutos (x)	0	1	2	3	4	5	...
Temperatura en ºC (y)	12	24	36	48	60	72	...

Tabla 4

Representa estos datos gráficamente. ¿Qué tipo de función representan?

Solución:

Al graficar la relación dada entre el tiempo que transcurre y la temperatura del líquido, se obtiene una línea recta que no pasa por el origen (Figura 5). Esto significa que dicha relación es una función afín cuya constante de proporcionalidad es 12 y corta el eje Y en el punto $(0, 12)$. Del razonamiento anterior se tiene que $m = 12$ y $b = 12$, con lo cual puede deducirse que la expresión algebraica de la función es $y = 12x + 12$.

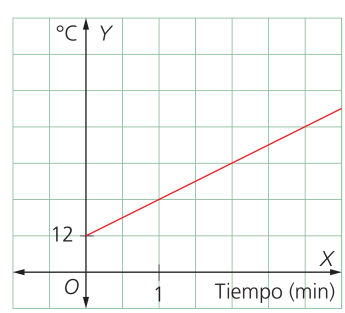


Figura 5

CULTURA del Buen Vivir

La fortaleza

El valor de la fortaleza surge cuando tenemos claros nuestros objetivos y proyectos personales.

- Cuando te enfrentas a una tarea difícil y complicada, ¿qué pensamientos te dan fortaleza?

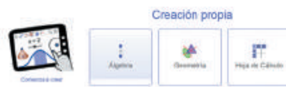
4 Funciones lineal y afín

MatemaTICS

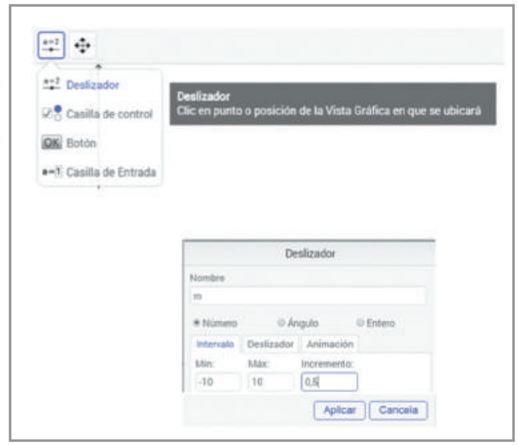
Representa funciones lineales y afines con GeoGebra

Para representar diversas funciones lineales o afines con Geogebra, se puede ingresar a la página y descargar el programa o trabajar directamente desde la página. En esta ocasión se trabajará directamente desde la página www.geogebra.org.

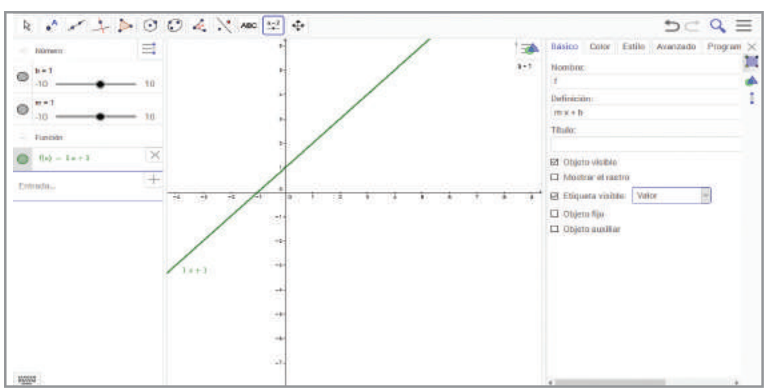
- Selecciona la opción *Iniciar GeoGebra*.
- Señala la opción *Álgebra*.



- En la barra de herramientas selecciona *Deslizador* y sobre la zona gráfica o el área de trabajo da clic en el punto donde quieres que se ubique el deslizador. Se abrirá una ventana en donde debe digitarse el *Nombre* m, intervalo *Min*: −10 *Máx*: 10 e *Incremento*: 0.5. Luego, se ubica un segundo deslizador con *Nombre* b, intervalo *Min*: −10 *Máx*: 10 e *Incremento*: 0.5.



- Cuando se digita, en minúsculas, f(x)=mx+b en el campo de *Entrada*, el programa muestra la gráfica. En el área de trabajo da clic derecho sobre la gráfica y luego señala *Propiedades*, en la parte derecha de la pantalla aparecerán las opciones para editar el color de la gráfica. En *Básico* selecciona la opción *Etiqueta visible*, despliega las opciones y selecciona *Valor*, de esta forma se observará la función que se está graficando a medida que mueves los deslizadores.



Utiliza esta creación para realizar lo siguiente:

- Sitúa el deslizador en m = 0 y mueve el deslizador b. Responde: ¿cómo son las gráficas?

  Ahora fija el valor del deslizador en b = 5, la recta que se dibuja es de la función *y* = 5. Escribe las coordenadas de tres puntos de esta función.
- Sitúa el deslizador en b = 0 y mueve el deslizador m. Responde: ¿todas las gráficas pasan por un mismo punto? ¿Cuál es ese punto?
- Mueve el deslizador m para que tome valores positivos únicamente. Responde: cuando m es positivo, ¿son las gráficas, crecientes o decrecientes? Por último, mueve el deslizador m para que tome valores negativos únicamente. Responde: cuando m es negativo, ¿son las gráficas crecientes o decrecientes?

Destrezas con criterios de desempeño:
- Definir y reconocer funciones lineales en Z, en base a tablas de valores, de formulación algebraica y/o representación gráfica con o sin el uso de la tecnología.
- Representar e interpretar modelos matemáticos con funciones lineales y resolver problemas.

Desarrolla tus destrezas

Comunicación

2 Determina, en cada caso, cuál es la constante de proporcionalidad de la función.

a. $j(x) = 7x$ b. $k(x) = \frac{1}{2}x$
c. $l(x) = -3x$ d. $g(x) = -5x$
e. $p(x) = x$ f. $f(x) = -x$

3 Indica si las siguientes funciones son lineales, afines o ninguna de las dos.

a. $g(x) = 25x^2 - 13$ b. $h(x) = 2x + 4$
c. $j(x) = 15^x$ d. $k(x) = \frac{4}{3}x$
e. $l(x) = 3$ f. $f(x) = -4x + 5$
g. $p(x) = x$ h. $r(x) = -3(x + 5)$

4 Identifica la constante de proporcionalidad y el punto de corte con el eje de ordenadas de cada función.

a. $j(x) = -2x + 1$ b. $f(x) = -3(x + 5)$
c. $m(x) = 4 - 7x$ d. $g(x) = -x + 10$
e. $p(x) = -\frac{2}{7}x - 15$ f. $r(x) = -3 + \frac{1}{5}x$

5 Representa en un mismo plano cartesiano cada función afín con su respectiva función lineal asociada.

a. $f(x) = -2x + 7$ b. $g(x) = 9x - 3$
c. $t(x) = 5 - 3x$ d. $j(x) = 3 - 9x$
e. $h(x) = x - 5$ f. $k(x) = \frac{1}{2}x + 11$
g. $m(x) = 2x + \frac{1}{2}$ h. $n(x) = -\frac{2}{3} - 3x$

6 Representa en un plano cartesiano los valores de cada tabla. Luego, determina si corresponden a una función lineal, afín o no lineal.

a.

x	$y = f(x)$
−2	4
−1	1
0	0
1	1
2	4

Tabla 5

b.

x	$y = f(x)$
−2	−8
−1	−4
0	0
1	4
2	8

Tabla 6

c.

x	$y = f(x)$
−2	−8
−1	−3
0	2
1	7
2	12

Tabla 7

d.

x	$y = f(x)$
−2	−8
−1	1
0	0
1	−8
2	1

Tabla 8

Razonamiento

7 Observa y responde.

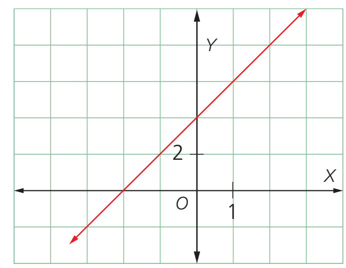


Figura 6

¿A cuál de las siguientes funciones corresponde la gráfica de la Figura 6?

a. $g(x) = -3x + 3$ b. $h(x) = 2x + 4$
c. $j(x) = -8x - 3$ d. $k(x) = -\frac{4}{3}x + 5$
e. $l(x) = 9$ f. $f(x) = 4x - 50$
g. $p(x) = x - 1$ h. $r(x) = 1 - x$

Resolución de problemas

8 La función $f(x) = 4x + 9$ representa la variación del capital (en millones de dólares) de una empresa con x años de funcionamiento. ¿Estas afirmaciones son verdaderas o falsas?

a. La función no es lineal, porque 9 y 4 son números cuadrados.

b. El capital inicial fue de nueve millones.

9 Por el alquiler de un auto, sin conductor, se cobra $ 20 diarios más $ 2 por kilómetro.

a. Halla la función lineal que relaciona el costo diario del alquiler con el número de kilómetros y represéntala.

b. Si en un día se recorren 300 km, ¿cuánto debe pagarse por el alquiler?

10 Una empresa que transporta maletas establece sus tarifas de la siguiente manera: $ 10 por kilómetro recorrido y $ 15 por cada maleta transportada.

a. ¿Cuánto costará trasladarse 100 km con una maleta? ¿Cuánto costará trasladarse 200 km con una maleta?

b. Completa la Tabla 8 considerando que se lleva una sola maleta:

Distancia en km (x)	100	150	250	300
Precio en USD (y)				

Tabla 9

c. Expresa la fórmula de la función que relaciona la distancia en kilómetros y el valor del traslado de una sola maleta.

Practica Más

Concepto de función

Comunicación

1. Observa la gráfica de la función representada en la Figura 1. Luego, realiza lo que se propone en cada caso.

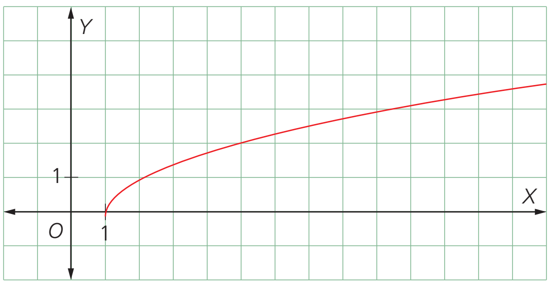


Figura 1

a. Elabora una tabla de valores.

b. Identifica el dominio y el rango de la función.

c. Identifica los valores para los cuales $f(x) = 1$, $f(x) = 2$ y $f(x) = 2{,}5$.

2. Lee y resuelve.

La altura de un proyectil, en metros, está determinada por la función $h(t) = 10t - t^2$, para un tiempo determinado de t segundos.

a. Identifica las variables dependiente e independiente.

b. Completa una tabla de valores y grafica la función.

c. Identifica el dominio y el rango de la función.

d. ¿Cuál es la altura máxima alcanzada por el proyectil?

e. ¿Después de cuánto tiempo el proyectil vuelve a caer al suelo?

f. ¿Cuál es la altura del proyectil a los 7 segundos?

g. ¿A los cuántos segundos el proyectil alcanza una altura de 10 m?

Funciones crecientes y funciones decrecientes

Comunicación

3. Identifica los intervalos donde crecen y decrecen las funciones representadas en las figuras 2 y 3.

a.

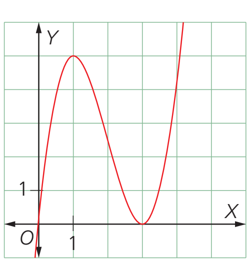


Figura 2

b.

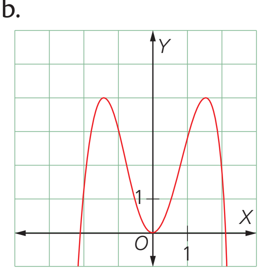


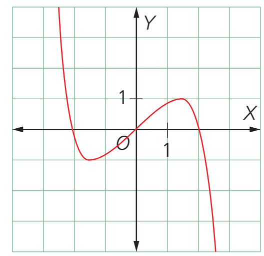
Figura 3

Funciones simétricas

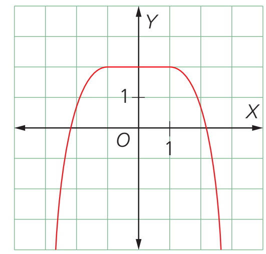
Razonamiento

4. Clasifica cada función según sea par o impar.

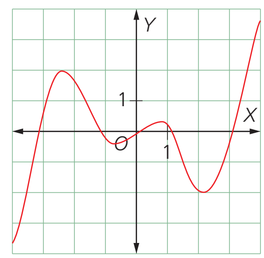
a.



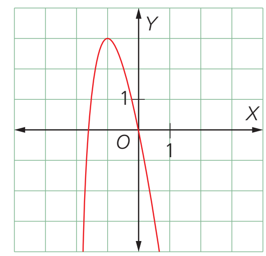
b.



c.



d.



5. Estudia la simetría de las siguientes funciones.

a. $f(x) = x^3 - x$

b. $f(x) = x^2 - 3$

c. $f(x) = x^2 - 4x$

Funciones lineal y afín

Razonamiento

6. Grafica las siguientes funciones afines.

a. $f(x) = -x - 0{,}5$

b. $f(x) = \frac{x}{2} + 3$

c. $f(x) = 4x - 1$

d. $f(x) = 2 - 4x$

7. Encuentra una función que cumpla con las condiciones dadas para cada caso.

a. Función afín con constante de proporcionalidad negativa.

b. Función lineal con constante de proporcionalidad 3.

c. Función afín con constante de proporcionalidad -5, que pasa por el punto (0, 2).

d. Función afín con constante de proporcionalidad $\frac{1}{2}$, que corta el eje Y en el punto (0, 3).

Estrategia: Seguir un método

Problema

El contador de una fábrica estima que la función que determina el costo (y) de producción de x artículos, en dólares, es:

$$2y - 600x = 240.$$

¿A cuánto equivalen los costos fijos de producción?

1. Comprende el problema

- ¿Qué información te da el enunciado?

R: La ecuación de una función que corresponde a los costos de producción de x artículos.

- ¿Qué debes hallar?

R: Los costos fijos de producción

2. Crea un plan

- Lleva la función a la forma $y = mx + b$ y calcula el costo cuando no se ha producido ningún artículo.

3. Ejecuta el plan

- De la ecuación correspondiente, deduce cuál valor toma m y cuál valor toma b.

$$2y - 600x = 240$$

$$2y = 600x + 240$$

$$y = \frac{600x + 240}{2}$$

$$y = 300x + 120$$

$$m = 300 \text{ y } b = 120$$

- Cuando no se han producido artículos, x vale cero.

$$y = 120$$

R: Los costos fijos de producción equivalen a 120 dólares.

4. Comprueba la respuesta

- Verifica que el costo de producir 25 artículos equivale a 7 620 dólares.

Aplica la estrategia

1. La expresión $3y - 450x = 660$ corresponde a la función que determina la cantidad de metros cúbicos de agua en un tanque, en relación con los días de lluvia. Si x representa el número de días, ¿que cantidad de agua habrá en el tanque luego de 10 días de lluvia?
   a. Comprende el problema

   ....

   ....

   b. Crea un plan

   ....

   ....

   c. Ejecuta el plan

   ....

   ....

   d. Comprueba la respuesta

   ....

   ....

Resuelve otros problemas

2. En clase de matemáticas, la profesora pide a los estudiantes que den ejemplos de situaciones reales que determinen una función. Sebastián propone: "la función que le asigne su primer apellido a cada estudiante del curso". ¿Es esta relación una función?
3. El número de personas que ingresa a cierto supermercado está determinado por la función:

$$f(x) = \frac{x^2 - 1}{2}.$$

¿Corresponde esta expresión a una función par?

4. La función $f(x) = 200x + 150$, con x como días, señala la cantidad de peces en un cultivo de truchas en una hacienda dedicada a la piscicultura. Cuando se observa el cultivo en un intervalo de tiempo de 8 a 15 días, ¿cómo cambia el número de peces?

Formula problemas

5. Inventa un problema que incluya la información de la Figura1

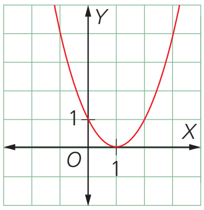


Figura 1

5 Pendiente de una recta

Explora

En la Tabla 1, se muestra el número máximo de latidos del corazón de una persona sana mientras hace actividad física en un intervalo de 30 segundos.

Edad en años x	Número máximo de latidos y
20	100
30	95
40	90

Tabla 1

- ¿Cuál es la variación de la cantidad máxima de latidos cada 10 años?

En la Tabla 1, se observa que el número de latidos del corazón disminuye a medida que aumenta la edad, pero también se infiere que el cambio sobre el número de los latidos del corazón es **constante**.

Este valor constante indica el cambio de una variable por unidad de cambio de la otra y es llamado **tasa de cambio**. Gráficamente, en el plano cartesiano, correspondería a la **pendiente** de la recta que modela la situación.

En general, en una función lineal $y = f(x)$, la razón de cambio de la variable dependiente y con respecto a la variable independiente x se calcula mediante la expresión:

$$\text{Pendiente} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}.$$

(x_1, y_1) y (x_2, y_2) son dos pares de valores de la función.

En la Tabla 2, se muestra que la tasa de cambio de los datos sobre los latidos del corazón es constante. Es decir, su pendiente es $-0{,}5$.

Solo las funciones lineales o afines tienen una tasa de cambio promedio constante.

Edad en años x	Número máximo de latidos
20	100
30	95
40	90

Tabla 2

$$\frac{95 - 100}{30 - 20} = -0{,}5$$

$$\frac{90 - 95}{40 - 30} = -0{,}5$$

En una función lineal $y = mx$ o en una función afín $y = mx + b$, la **constante de proporcionalidad** m corresponde a la **pendiente** de la recta mediante la cual se representa la función.

Ten en cuenta

Si las variables en una función lineal o afín no tienen ninguna dependencia, la tasa de cambio o pendiente es cero.

De acuerdo con lo anterior, tanto las funciones lineales como las funciones afines son **crecientes** en su dominio, si su pendiente es positiva y son **decrecientes** en su dominio, si su pendiente es negativa. Además, una función afín es **constante** si su pendiente es cero y corresponde a una recta paralela al eje X.

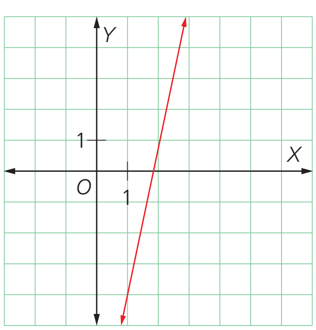


Figura 1

Ejemplo 1

Para hallar la pendiente de la recta de la Figura 1, se consideran dos puntos que pertenezcan a ella, por ejemplo, $(x_1, y_1) = (1, -4)$ y $(x_2, y_2) = (2, 1)$. Luego, se reemplazan los valores correspondientes en la expresión general de la pendiente:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{1-(-4)}{2 - 1} = 5.$$

Por lo tanto, la pendiente de la recta dada es 5.

Actividad resuelta

Razonamiento

1. Estudia la función $f(x) = 3x - 5$ a partir del análisis de su pendiente.

Solución:

La función afín $f(x) = 3x - 5$ es creciente en el intervalo $(-\infty, \infty)$, porque la pendiente es positiva ($3 > 0$). Su representación en el plano cartesiano es una recta que corta el eje Y en -5.

Destreza con criterios de desempeño: Definir y reconocer una función lineal de manera algebraica y gráfica (con o sin el empleo de la tecnología) e identificar su monotonía a partir de la gráfica o su pendiente.

Desarrolla tus destrezas

Ejercitación

2 Encuentra la pendiente de la recta que pasa por los puntos dados.

a. $(-1, 0)$ y $(0, 1)$ b. $(0, 1)$ y $(1, 0)$

c. $(-1, 4)$ y $(2, 4)$ d. $(-6, 4)$ y $(5, -2)$

e. $(-1, 4)$ y $(-5, -2)$ f. $(3, 4)$ y $(3, -2)$

Razonamiento

3 Clasifica cada recta obtenida en la actividad 2 según sea creciente, decreciente o constante.

Comunicación

4 Lee y resuelve.

Cuando la pendiente de una recta es indeterminada, dicha recta es vertical (paralela al eje Y). Por ejemplo, $x = 3$ es la ecuación de una recta cuya pendiente no puede determinarse. Su gráfica se muestra en la Figura 2.

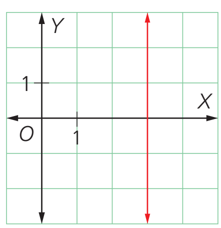


Figura 2

Traza la gráfica de las siguientes rectas.

a. $x = -3$ b. $x = 4$

c. $x = -5$ d. $x = 6$

5 Calcula la pendiente de las rectas que se muestran en las figuras 3. a 6.

a.

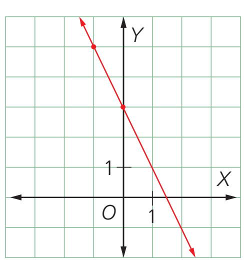


Figura 3

b.

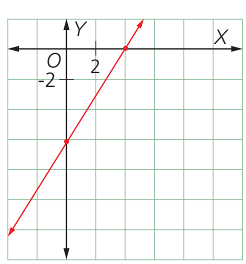


Figura 4

c.

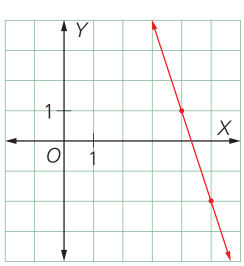


Figura 5

d.

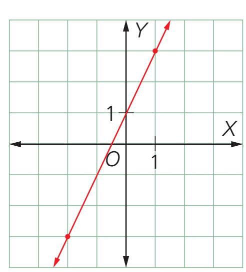


Figura 6

Razonamiento

6 Estudia las tablas de valores. Luego, clasifícalas, según corresponda, en funciones crecientes, decrecientes o constantes.

a.

x	$y = f(x)$
-2	7
-1	7
0	7
1	7
2	7

Tabla 3

b.

x	$y = f(x)$
-2	5,5
-1	5,25
0	5
1	4,75
2	4,5

Tabla 4

c.

x	$y = f(x)$
-2	9
-1	11
0	13
1	15
2	17

Tabla 5

d.

x	$y = f(x)$
-2	-12
-1	-10
0	-8
1	-6
2	-4

Tabla 6

e.

x	$y = f(x)$
-2	4
-1	6
0	8
1	10
2	12

Tabla 7

f.

x	$y = f(x)$
-2	120
-1	100
0	80
1	60
2	40

Tabla 8

Resolución de problemas

7 El encargado de pruebas de velocidad de una empresa aeronáutica desea conocer la velocidad de un avión en cierto intervalo de tiempo. Al realizar una medición del tiempo en minutos junto con la distancia recorrida en kilómetros obtuvo los datos de la Tabla 9.

Tiempo (m) x	Distancia recorrida (km) y
20	100
30	125
40	150

Tabla 9

a. Halla una función afín lineal que modele la situación.

6 Ecuación de la recta

Explora

La recta de la Figura 1 pasa por el punto (1, 3) y tiene como pendiente el valor $-\frac{1}{4}$.

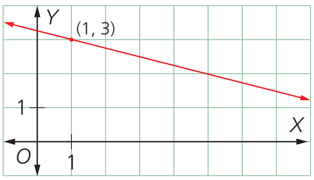


Figura 1

- ¿Cuál es la ecuación de la recta?

6.1 Ecuación de la recta conociendo la pendiente y un punto

Cuando se conocen la pendiente (m) y un punto (x_1, y_1), puede utilizarse la expresión algebraica de la pendiente para determinar la ecuación de una recta.

$$m = \frac{y - y_1}{x - x_1} \Rightarrow (x - x_1)\,m = (y - y_1) \Rightarrow (y - y_1) = m(x - x_1)$$

A la expresión $(y - y_1) = m(x - x_1)$ se le conoce como **ecuación punto-pendiente**.

Para el caso de la recta que pasa por el punto (1,3) y tiene pendiente $-\frac{1}{4}$, se reemplazan estos valores en la expresión general de ecuación punto-pendiente y se obtiene:

$$(y - y_1) = m\,(x - x_1) \Rightarrow (y - 3) = -\frac{1}{4}(x - 1)$$

$$y - 3 = -\frac{1}{4}x + \frac{1}{4}$$

$$y = -\frac{1}{4}x + \frac{1}{4} + 3$$

$$y = -\frac{1}{4}x + \frac{13}{4}$$ ← Ecuación de la recta

La ecuación de una recta dados la pendiente m y un punto (x_1, y_1) es:

$$(y - y_1) = m(x - x_1)$$

A esta ecuación se le denomina **ecuación punto-pendiente**.

Ejemplo 1

La ecuación de la recta que pasa por el punto $(-3, 5)$ y tiene pendiente 2 se obtiene de la siguiente manera:

$(y - 5) = 2[x - (-3)]$ ← Se reemplaza en la ecuación punto-pendiente.

$y - 5 = 2x + 6$ ← Se aplica la propiedad distributiva.

$y = 2x + 6 + 5$ ← Se despeja la variable y.

$y = 2x + 11$ ← Se obtiene la ecuación de la recta.

Para elaborar la gráfica, basta con considerar que la recta pasa por los puntos $(-3, 5)$ y $(-5, 1)$. Observa la Figura 2.

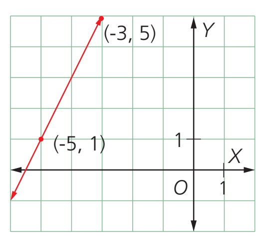


Figura 2

Ejemplo 2

La ecuación de la recta que pasa por el punto $(-2, -1)$ y cuya pendiente es -1 es:

$[y - (-1)] = -1[x - (-2)]$

$y + 1 = -x - 2$

$y = -x - 2 - 1$

$y = -x - 3$ (Figura 3)

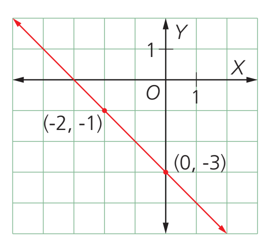


Figura 3

Ten en cuenta

La pendiente de una recta es la inclinación que tiene con respecto al eje positivo de las x. La pendiente $-\frac{1}{4}$ indica que esta disminuye una unidad en y por cada cuatro unidades en x.

CULTURA del Buen Vivir

La fortaleza

El valor de la fortaleza permite afrontar la realidad de las cosas con madurez y equilibrio emocional.

- Cuando tu mejor amigo pasa por momentos difíciles, ¿cómo puedes inspirar en él el valor de la fortaleza?

Destrezas con criterios de desempeño:
- Determinar la ecuación de la recta, conocidos algunos de sus elementos.
- Reconocer a la recta como la solución gráfica de una ecuación lineal con dos incógnitas en R.

6.2 Ecuación de la recta conociendo dos puntos

Para determinar la ecuación de la recta dados dos puntos (x_1, y_1) y (x_2, y_2), se debe:

1. Calcular la pendiente por medio de la expresión $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$.
2. Usar la pendiente m calculada y uno de los puntos (x_1, y_1) o (x_2, y_2) para reemplazar en la ecuación punto-pendiente $(y - y_1) = m(x - x_1)$.

Ejemplo 3

En la Figura 4, se observa la recta que pasa por los puntos $(-4, 5)$ y $(2, 1)$.

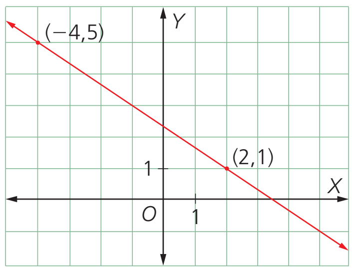


Figura 4

Para encontrar la ecuación de la recta conociendo dos puntos de la misma, se emplea la expresión algebraica de la pendiente, así:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{1 - 5}{2 - (-4)} = \frac{-4}{6} = \frac{-2}{3}.$$

Luego, con $m = -\frac{2}{3}$ y uno de los puntos, en este caso $(2, 1)$, se obtiene la ecuación de la recta en la forma **punto-pendiente.**

$$(y - y_1) = m(x - x_1) \Rightarrow (y - 1) = -\frac{2}{3}(x - 2)$$

$$\Rightarrow y - 1 = -\frac{2}{3}x + \frac{4}{3} \Rightarrow y = -\frac{2}{3}x + \frac{4}{3} + 1$$

$$\Rightarrow y = -\frac{2}{3}x + \frac{7}{3} \leftarrow \text{Ecuación de la recta}$$

Actividad resuelta

Ejercitación

1. Determina la ecuación de la recta correspondiente a los valores asociados a cierta función afín que se registran en la Tabla 1.

x	−3	−2	−1	0	1	2
y	−14	−11	−8	−5	−2	1

Tabla 1

Solución:

Sean $(x_1, y_1) = (-1, -8)$ y $(x_2, y_2) = (2, 1)$, primero se calcula la pendiente:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{1 - (-8)}{2 - (-1)} = \frac{9}{3} = 3.$$

Luego, se reemplaza en la **ecuación punto-pendiente**:

$$(y - y_2) = m(x - x_2) \Rightarrow (y - 1) = 3(x - 2)$$

$$\Rightarrow y - 1 = 3x - 6 \Rightarrow y = 3x - 6 + 1$$

$$\Rightarrow y = 3x - 5$$

Razonamiento matemático

Ecuación de la recta

Los vértices de un triángulo son los puntos $M(-1, -3)$, $G(2, 5)$ y $B(3, -4)$.

- Halla la ecuación de la recta que contiene a cada uno de los lados del triángulo MGB.
- Elabora la gráfica de la situación planteada en un plano cartesiano.

Ten en cuenta

- La ecuación de la recta horizontal que pasa por el punto (x_1, y_1) es $y = y_1$ y su pendiente es cero.
- La ecuación de la recta vertical que pasa por el punto (x_1, y_1) es $x = x_1$ y tiene pendiente indefinida.

6 Ecuación de la recta

Desarrolla tus destrezas

Ejercitación

2 Encuentra la ecuación de la recta que pasa por el punto P y tiene pendiente m en cada caso.

a. $P(-7, 4)$ y $m = 5$

b. $P(-1, 7)$ y $m = -2$

c. $P(5, 6)$ y $m = 3$

d. $P(2, 1)$ y $m = -\frac{1}{2}$

e. $P(0, 1)$ y $m = -\frac{3}{2}$

3 Halla la pendiente y la ecuación de la recta que pasa por cada par de puntos.

a. $(1, -5)$ y $(-2, 1)$

b. $(2, 14)$ y $(-1, -7)$

c. $(-2, -2)$ y $(0, 10)$

d. $(-3, 5)$ y $(-4, -1)$

e. $(-1, 0)$ y $(0, -1)$

f. $(-5, 3)$ y $(4, 1)$

g. $\left(1, \frac{13}{2}\right)$ y $(6, -4)$

h. $\left(3, \frac{29}{2}\right)$ y $\left(1, \frac{13}{2}\right)$

i. $\left(3, \frac{23}{5}\right)$ y $\left(-1, -\frac{1}{5}\right)$

j. $\left(\frac{1}{2}, -\frac{3}{4}\right)$ y $\left(-\frac{3}{2}, -\frac{5}{4}\right)$

Razonamiento

4 Selecciona, en cada caso, a cuál ecuación de la recta corresponde la ecuación punto-pendiente dada.

a. $(y + 2) = 4(x - 2)$

- $y = 4x - 10$
- $y = 4x$
- $y = 4x$
- $y = 4x + 10$

b. $(y - 3) = 2(x + 1)$

- $y = 2x - 5$
- $y = 2x$
- $y = 5x$
- $y = 2x + 5$

c. $(y + 4) = -3(x - 3)$

- $y = 3x - 5$
- $y = -3x$
- $y = 3x$
- $y = -3x + 5$

d. $(y - 8) = -5(x + 1)$

- $y = -5x + 3$
- $y = -5x$
- $y = 5x$
- $y = 5x - 3$

Razonamiento

5 Determina si es verdadera o falsa cada afirmación.

a. La recta que pasa por los puntos $(3, -2)$ y $(4, 0)$ tiene por ecuación $y = -2x + 8$.

b. La ecuación de la recta que pasa por $(-5, 1)$ y $(-6, 3)$ es $y = 2x + 9$.

c. La recta cuya ecuación es $y = -6$ pasa por los puntos $(-1, 6)$ y $(-2, 6)$.

d. La ecuación de la recta que pasa por $(-7, 8)$ y por $(-6, 11)$ es $y = 3x + 29$.

e. La ecuación de la recta que pasa por $(0, -3)$ y $(4, -1)$ es $y = \frac{1}{2}x - 3$.

f. La recta que pasa por los puntos $(2, -6)$ y $(-3, 14)$ tiene por ecuación $y = -4x + 2$.

g. La recta que pasa por los puntos $(-2, 4)$ y $(4, 7)$ tiene por ecuación $y = \frac{1}{2}x + 5$.

h. La recta que pasa por los puntos $\left(-1, -\frac{13}{2}\right)$ y $\left(0, -\frac{5}{2}\right)$ tiene por ecuación $y = 5x + \frac{3}{2}$.

i. La recta que pasa por los puntos $(-5, 2)$ y $(-9, -6)$ tiene por ecuación $y = 3x - 3$.

Comunicación

6 Calcula la pendiente de cada recta. Luego, encuentra su ecuación considerando los puntos que pertenecen a ella.

a.

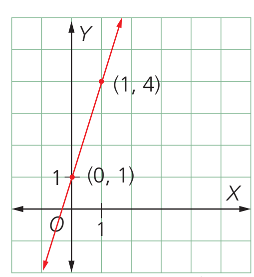


Figura 5

b.

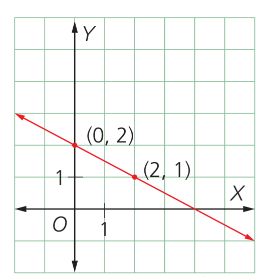


Figura 6

c.

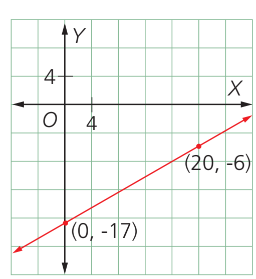


Figura 7

d.

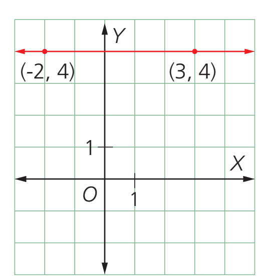


Figura 8

Destreza con criterios de desempeño: Determinar la ecuación de la recta, conocidos algunos de sus elementos y resolver problemas de aplicación.

Comunicación

7 Determina la ecuación de cada recta.

a.

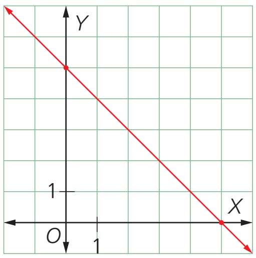


Figura 9

b.

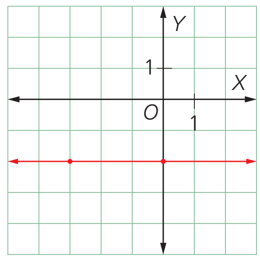


Figura 10

c.

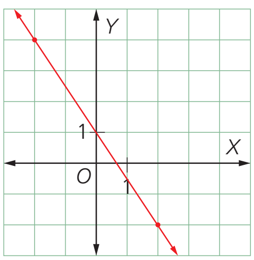


Figura 11

d.

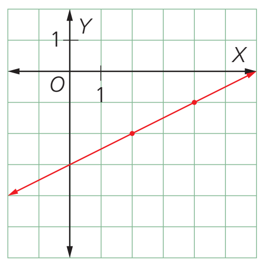


Figura 12

e.

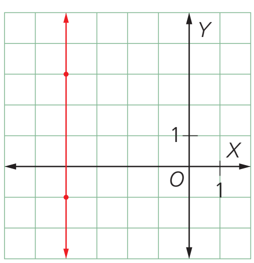


Figura 13

f.

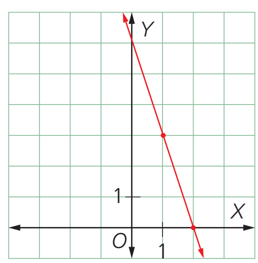


Figura 14

Resolución de problemas

8 Ten en cuenta la información de la Figura 15. Luego, responde la pregunta.

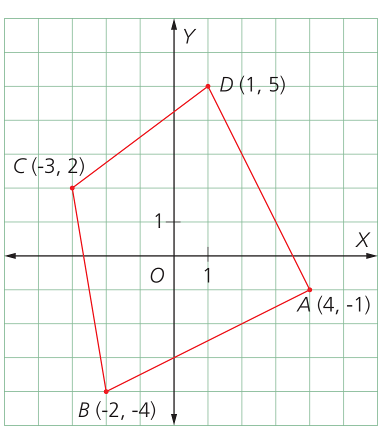


Figura 15

¿Cuáles son las ecuaciones de las rectas que contienen los lados del cuadrilátero *ABCD*?

9 Observa el triángulo de la Figura 16.

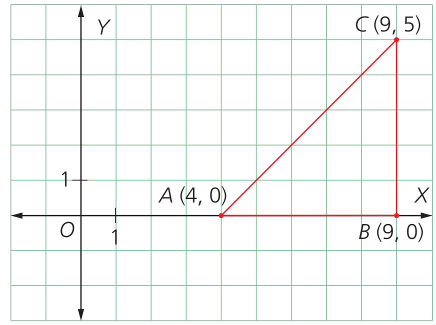


Figura 16

¿Qué clase de triángulo es *ABC*? Justifica tu respuesta.

10 Felipe quiere comprar un videojugo. Tiene $\$ 50$ de su cumpleaños, pero el videojuego original que quiere cuesta $\$ 290$, así que tendrá que ahorrar para juntar el resto. Su plan es ahorrar $\$ 20$ al mes hasta que consiga la cantidad que necesita.

a. Escribe una ecuación que le ayude a saber cuándo tendrá suficiente dinero para comprar el videojuego. Ten en cuenta que x será el tiempo en meses y y será la cantidad de dinero ahorrado. Pasado el primer mes Felipe tiene $\$ 70$, lo que significa que cuando $x = 1$, $y = 70$, es decir, la recta pasa por el punto $(1, 70)$. También sabemos que Felipe espera ahorrar $\$ 20$ al mes. Esto equivale a la tasa de cambio o pendiente.

b. ¿Cuántos meses deben pasar para que Felipe pueda comprar el videojuego?

11 Una empresa de turismo ha observado que cuando el precio de un viaje es de $\$ 150$ se venden 40 asientos, pero si el precio sube a $\$ 180$, las ventas bajan a 30 asientos.



a. Encuentra la ecuación de la recta que representa la situación y dibuja su gráfica.

b. Determina el precio del pasaje si la venta sube a 56 asientos.

7 Relación entre las pendientes de rectas paralelas y perpendiculares

Explora

Un técnico *A* de reparaciones de electrodomésticos cobra $ 15 por la visita más $ 5 por cada hora de trabajo. Otro técnico *B* cobra $ 10 por la visita más $ 5 por cada hora de trabajo.

- En algún momento, ¿los técnicos podrían ganar la misma cantidad de dinero por igual cantidad de horas trabajadas?

Una manera de resolver la situación consiste en analizar el comportamiento del dinero ganado por cada técnico. Para ello, se plantean las siguientes expresiones en función de las horas de trabajo (x).

Técnico *A*: $y = 5x + 15$
Técnico *B*: $y = 5x + 10$

Estas ecuaciones expresan funciones afines. Al representarlas en el mismo plano se observa que las rectas correspondientes no tienen puntos en común, es decir, son **rectas paralelas** (Figura 1).

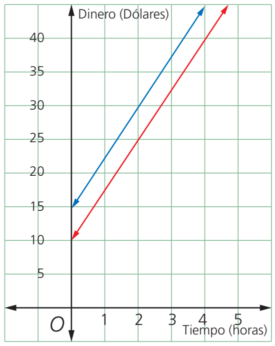


Figura 1

En el contexto planteado, esto significa que, en ningún momento, los técnicos ganan la misma cantidad de dinero por igual cantidad de horas trabajadas.

Por otra parte, con el análisis conjunto de las ecuaciones y de las gráficas, se concluye que estas rectas tienen la misma pendiente.

Dos **rectas** son **paralelas** si tienen la misma pendiente.

Ejemplo 1

Para determinar si las rectas $y = 4x + 1$ y $y = 4x - 7$ son paralelas, basta con analizar sus pendientes.

$$\text{Recta 1: } y = 4x + 1 \Rightarrow m_1 = 4$$
$$\text{Recta 2: } y = 4x - 7 \Rightarrow m_2 = 4$$

Lo anterior permite concluir que las rectas dadas son paralelas, pues tienen la misma pendiente. Sus gráficas se muestran en la Figura 2.

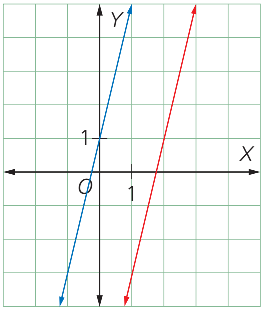


Figura 2

Dos **rectas** son **perpendiculares** si el producto de sus pendientes es igual a -1.

Ejemplo 2

Dadas las rectas $y = 2x + 1$ y $y = -0{,}5x - 7$, se observa que:

$$\text{Recta 1: } y = 2x + 1 \Rightarrow m_1 = 2$$
$$\text{Recta 2: } y = -0{,}5x - 7 \Rightarrow m_2 = -0{,}5.$$

Además:

$$m_1 \cdot m_2 = 2 \cdot (-0{,}5) = -1,$$

por lo tanto, las rectas dadas son perpendiculares (Figura 3).

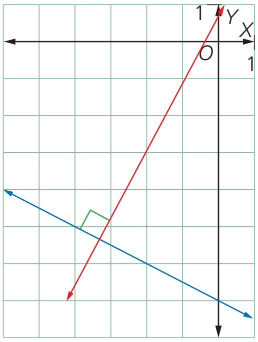


Figura 3

Actividad resuelta

Razonamiento

1 Encuentra una recta que sea perpendicular a la recta $y = 5x + 3$, que pase por el punto (3, 0).

Solución:

Sea $m_1 = 5$ la pendiente de la recta dada, es necesario encontrar el valor de m_2 tal que $m_1 \cdot m_2 = -1$. Como el valor que satisface la igualdad es $-\frac{1}{5}$ entonces se asume que $m_2 = -\frac{1}{5}$. Usando una ecuación punto-pendiente, se encuentra que la ecuación buscada es:

$$(y - y_1) = m(x - x_1) \Rightarrow (y - 0) = -\frac{1}{5}(x - 3) \Rightarrow \quad y = -\frac{1}{5}x + \frac{3}{5}.$$

Destreza con criterios de desempeño: Reconocer la relación entre las pendientes de rectas paralelas y perpendiculares, y resolver ejercicios.

Desarrolla tus destrezas

Ejercitación

2 Indica, en cada caso, si las rectas dadas son paralelas o no. Justifica tus respuestas.

a. $y = 4x - 2$ y $y = 4x + 3$

b. $y = -\frac{2}{3}x + 6$ y $y = -\frac{3}{2}x + 1$

c. $y = -6x - 2$ y $y = -6x - \frac{1}{4}$

d. $y = 2x + \frac{7}{3}$ y $y = 2x - 7$

e. $y = -\frac{1}{4}x + 11$ y $y = -4x + 11$

f. $y = 14 - 7x$ y $y = 7 - 14x$

g. $y = 2x - 1$ y $y = 1 - 2x$

3 Estudia la pendiente de cada recta. Luego, indica si las rectas de cada par son perpendiculares o no.

a. $y = -\frac{3}{4}x + 7$ y $y = -\frac{4}{3}x - 1$

b. $y = 9 - 4x$ y $y = -\frac{1}{4}x + 3$

c. $y = 3x - 1$ y $y = 1 - \frac{1}{3}x$

d. $y = -x - \frac{1}{5}$ y $y = x + 5$

e. $y = 7x + \frac{1}{4}$ y $y = 7x - \frac{1}{7}$

Razonamiento

4 Determina si las rectas cuyos valores se registraron en las Tablas 1 y 2 son paralelas o perpendiculares.

x	$y = f(x)$
−2	6
−1	5,5
0	5
1	4,5
2	4

Tabla 1

x	$y = f(x)$
−2	−3
−1	−1
0	1
1	3
2	5

Tabla 2

5 Deduce si, en cada caso, las rectas son paralelas o perpendiculares.

a. Una recta que pasa por los puntos (2, 11) y (−1, 2) y otra recta que pasa por (0, −4) y (−2, −10).

b. Una recta que pasa por los puntos (−2, −7) y (1, 5) y otra recta que pasa por (4, 1) y (−8, 4).

c. Una recta que pasa por los puntos (3, 1) y (−2, −2) y otra recta que pasa por (5, 5) y (4, −6).

d. Una recta que pasa por los puntos (0, 1) y (−2, 1) y otra recta que pasa por los puntos (0, 0) y (−4, 2).

Comunicación

6 Encuentra las rectas perpendicular o paralela a la recta dada, según se indique.

a. La ecuación de la recta perpendicular a $y = -3x + 5$ que pasa por el punto (2, 6).

b. La ecuación de la recta paralela a la recta $x - 5y = 15$ que pasa por el punto (−2, 5).

c. La ecuación de la recta perpendicular a $y = -3 + 5x$ que pasa por el punto (4, −2).

d. La ecuación de la recta paralela a la recta $y = 6x - 9$ que pasa por el punto (−1, 4).

e. La ecuación de la recta paralela a $0 = 7 - 3y + 5x$ que pasa por el punto (9, 2).

7 Observa la gráfica de la Figura 4. Luego, realiza lo que se indica a continuación.

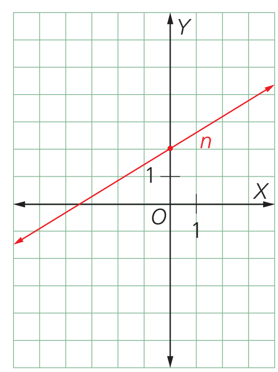


figura 4

a. Encuentra la ecuación de la recta paralela a la recta n, que pasa por el punto (2, 1).

b. Encuentra la ecuación de la recta perpendicular a la recta n, que pasa por el punto (−2, 1).

Resolución de problemas

8 En la Figura 5, se observa un triángulo ABC.

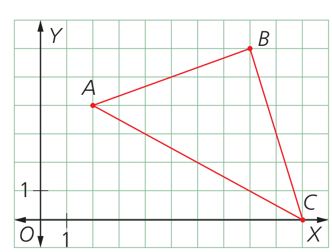


Figura 5

a. Encuentra la ecuación de las rectas que contienen los lados $\overline{AB}$ y $\overline{BC}$.

b. ¿Puede afirmarse que el triángulo es rectángulo? Explica tu respuesta.

Prueba Ser Estudiante

A continuación se presentan ejercicios con cuatro alternativas de solución, de las cuales, una sola es la correcta. Señala en la tabla de respuestas, el literal que consideres correcto.

1. El conjunto de todos los valores que toma la variable independiente es:

A. el dominio de la función

B. el recorrido de la función

C. la gráfica de la función

D. la monotonía de la función

2. De las siguientes funciones ¿cuáles son crecientes?

a. $h(x) = 3x^2 - 1$ b. $g(x) = x^5 + 2$ c. $j(x) = 2x$

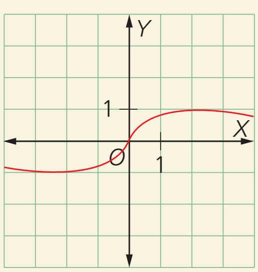
A. a y b

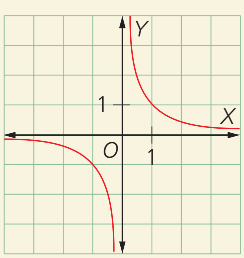
B. a y c

C. b y c

D. todas

3. De las siguientes gráficas de funciones podemos afirmar que son:





A. pares

B. impares

C. par e impar

D. impar, par

4. Una empresa que transporta materiales de construcción establece sus tarifas de la siguiente manera: $ 5 por kilómetro recorrido y $ 15 por cada viaje. ¿Cuánto costará trasladarse 300 km en un viaje?

A. $ 1 375

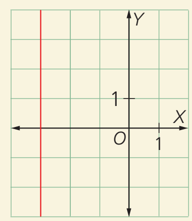
B. $ 4 505

C. $ 1 575

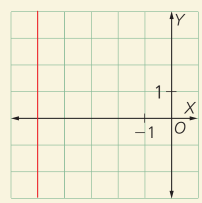
D. $ 1 515

5. La gráfica que corresponde a la recta $x = 6$ es:

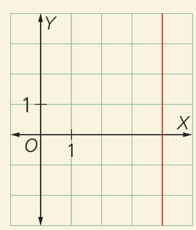
A.



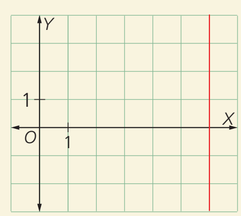
B.



C.



D.



6. ¿Cuál de los siguiente puntos pertenecen a la recta $y = 7x - 33$?

A. $(5, -2)$

B. $(2, -5)$

C. $(4, -5)$

D. $(-4, -5)$

Indicadores de logro:
- Determina la monotonía de funciones.
- Resuelve ecuaciones de primer grado con una incógnita en R, de manera gráfica y/o algebraica.

7. De las siguientes funciones, ¿cuáles son decrecientes?

a. $h(x) = -x - 1$ b. $g(x) = x - 1$

c. $p(x) = -2x - 1$

A. a y c

B. a y b

C. b y c

D. todas son decrecientes

8. De las siguientes funciones, ¿cuáles son pares?

a. $g(x) = x^2$ b. $k(x) = x^2 + 1$

c. $p(x) = x^6$

A. a y b

B. b y c

C. a y c

D. todas son pares

9. Por el alquiler de una buseta para 10 personas, se cobra $ 30 diarios más $ 4 por kilómetro. ¿ Cuál es la función que relaciona el costo diario del alquiler con el número de kilómetros?

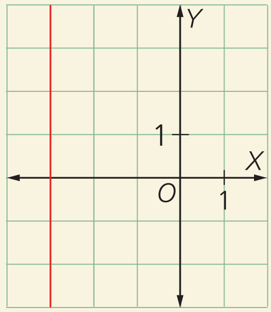
A. $y = 4x + 30$

B. $y = 30x + 4$

C. $y = x + 30$

D. $y = 4x - 30$

10. De la siguiente gráfica, ¿cuál es la recta correspondiente?



A. $x = -4$

B. $x = -3$

C. $x = 3$

D. $x = 4$

11. La recta que pasa por los puntos $(2, -6)$ y $(-3, 14)$ tiene por ecuación:

A. $y = 4x + 2$

B. $y = 4x - 2$

C. $y = -4x + 2$

D. $y = -4x - 2$

12. Determina el conjunto de los valores que debe tomar a para que la recta que pase por los puntos $(-2, 3)$ y $(a, -8)$ siempre tenga pendiente negativa.

A. $a > -2$

B. $a > -4$

C. $a > 2$

D. $a > 4$

Tabla de respuestas

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A
B	B	B	B	B	B	B	B	B	B	B	B
C	C	C	C	C	C	C	C	C	C	C	C
D	D	D	D	D	D	D	D	D	D	D	D

Crisis alimentaria universal

Actualmente los principales cambios en la economía mundial, tales como el crecimiento de los flujos comerciales, los grandes volúmenes de inversión, la revolución de las telecomunicaciones y los transportes, entre otros, no se han visto reflejados en la reducción del hambre. Las hambrunas y el hambre siguen presentes en la era de la revolución digital y de los viajes espaciales.


SM Ediciones

Causas de la crisis alimentaria

Uno de los grandes problemas de este siglo es la escasez de alimentos, la población humana crece cada vez más y los alimentos no se distribuyen de igual manera entre todos. Además la producción de alimentos pareciera no ser suficiente para tanta gente. Definitivamente, las causas de esta crisis alimentaria son variadas.



SM Ediciones

Actúa para reducir la crisis alimentaria

Explica por qué las siguientes actividades ayudarían a reducir la crisis alimentaria.

1. Tener huertos caseros.



....

....

....

2. Usar plantas decorativas en vez de comprar flores.



....

....

....

3. Desplazarse en bicicleta o caminando.



....

....

....

Conexión con las matemáticas

Thomas Malthus (1766-1834) fue un clérigo inglés con gran influencia en la política de su época, que se hizo famoso por su teoría de la población. Fue el primero en asegurar que el crecimiento de las poblaciones sigue un modelo exponencial y en alertar a los dirigentes de la época acerca de que los recursos naturales no crecían tan rápidamente.



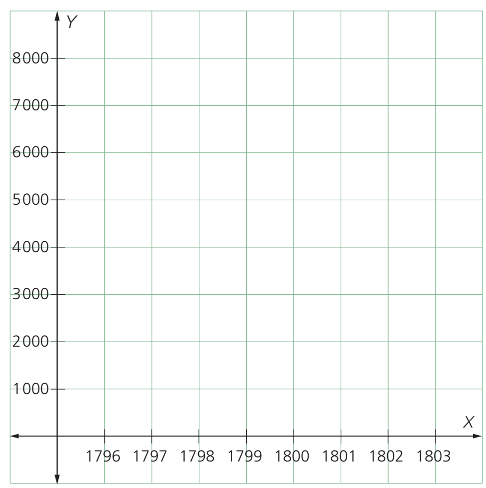
A pesar de que la teoría de Malthus fue rebatida, sirvió como base para calcular modelos más precisos para expresar el crecimiento de las poblaciones y de los recursos humanos.

- En la siguiente tabla se muestran algunos valores calculados según la teoría de Thomas Malthus.

Año	Personas (millones)	Alimento (millones de toneladas)
1796	1 000	1 000
1797	2 000	2 000
1798	4 000	3 000
1799	8 000	4 000

Trabajo en grupo

1. Dibujen en un cartel la gráfica de crecimiento poblacional de las personas y de los recursos naturales, según los datos calculados por Malthus.



2. Describan el comportamiento de las curvas de crecimiento de la población de personas y de los recursos naturales.

....

3. Argumenten qué sucedería con la población humana y las hambrunas en caso de que la teoría de Malthus fuese completamente correcta.

....

Habilidades digitales

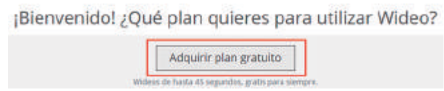
Describe una temática con Wideo

Evaluar información confiable y comunicarla es más atractivo y divertido con Wideo. Esta es una red social en la que puedes realizar audiovisuales de manera sencilla y agradable. Los videos elaborados pueden compartirse y almacenarse en http://wideo.co/. En esta actividad, aprenderás a hacer y compartir un video en Wideo.

1 Abre tu cuenta en Wideo

a. Ve a la dirección [www.wideo.co] y da clic sobre el botón [Registrarme].

b. Selecciona la opción de plan gratuito.



c. Diligencia el formulario con los datos solicitados, elige el perfil *Estudiante* y luego oprime *Registrarme*.

d. Da clic sobre la plantilla + *En blanco* para crear un nuevo video y observa el video tutorial.

e. Escribe los datos de tu nuevo video: Título, Tipo de video, Descripción y Etiquetas (palabras clave) y da clic sobre [Guardar].



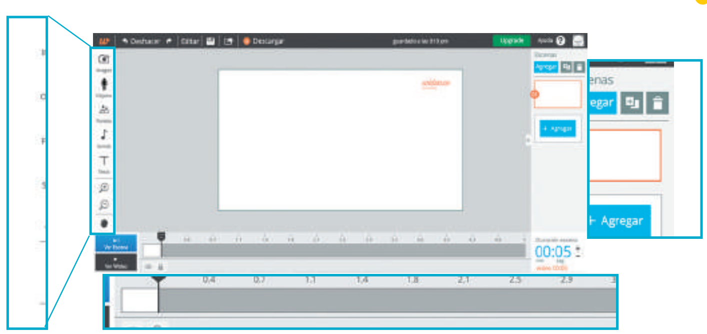
2 Reconoce el entorno de Wideo

a. Barra de herramientas

b. Editor de escenas

c. Línea de tiempo y Explorador de objetos

d. Zona de trabajo



3 Crea tu video

a. Busca información de fuentes confiables sobre las maneras de expresar números en notación científica y haz un borrador con una descripción detallada sobre la temática.

b. Incluye un texto así:

- Ve a la barra de herramientas y escoge la opción *Texto*.
- Da doble clic en *Escribe texto aquí*, edita el texto y ubícalo como prefieras dentro de la zona de trabajo.



4 Incluye una figura en tu video

a. Da clic sobre la opción *Objetos* en la barra de herramientas y luego sobre *Íconos*.

b. Selecciona un ícono y luego edita su ubicación y tamaño en la zona de trabajo.

c. Edita el fondo. Da clic sobre la opción *Fondos* de la barra de herramientas y selecciona el que más te guste, para ponerlo en tu video.



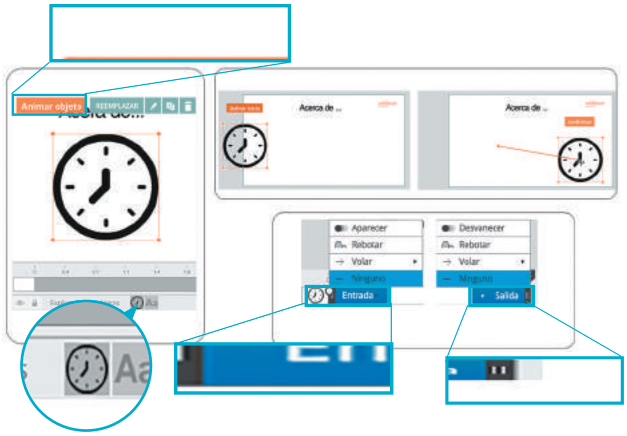
5 Anima los objetos de la escena

a. Da clic sobre el objeto que vas a animar en el explorador de objetos y luego oprime el botón *Animar objeto* en la zona de trabajo.

b. Escoge una ubicación inicial del objeto y da clic sobre *Definir inicio*. Luego usa el punto del centro del objeto, cámbialo de lugar y en seguida oprime *Confirmar*.

c. Ve a línea de tiempo y selecciona una animación para el objeto, tanto a la *Entrada* como a la *Salida* de la escena.

d. Usa los botones *Ver escena* y *Ver Wideo* para revisar el progreso de la escena y de la totalidad del video.



6 Guarda y comparte tu video

a. Da clic sobre el botón  para guardar tu video.

b. Oprime el botón  para compartir tu video. Copia el link de tu audiovisual y envíalo por correo a tus compañeros de clase.

Aprende más

Mejora tu video agregando más escenas.

a. Ve al editor de escenas y da clic sobre el botón + *Agregar*.

b. Repite las acciones b a d del paso 3, y los pasos 4 y 5.



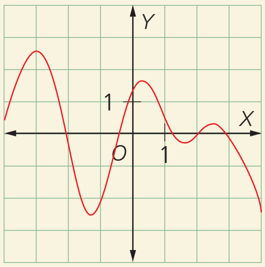
Evaluación de la unidad

Concepto de función

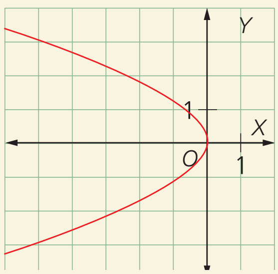
Comunicación

1. Identifica la gráfica que no representa una función.

a.



b.



Modelación

2. Escribe una ecuación que relacione los siguientes datos.

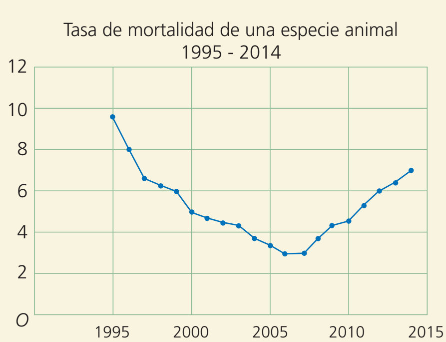
Cantidad de personas (x)	2	3	5	7
Número de pasteles (y)	7	10	16	22

Funciones crecientes y funciones decrecientes

Comunicación

3. Lee y resuelve.

En la gráfica se presenta la tasa de mortalidad de una especie animal en los últimos 20 años. Saca dos conclusiones a partir del análisis de crecimiento y decrecimiento.



Funciones lineal y afín

Resolución de problemas

4. El recibo de facturación del servicio del agua maneja un cargo fijo de \$ 15 y cobra \$ 3 por cada metro cúbico de consumo.

a. ¿Es la función que relaciona los datos una función lineal? Explica.

b. Si el consumo del mes fue de 13 m^3, ¿cuál será el valor a pagar en la factura?

Pendiente de una recta

Razonamiento

5. Relaciona las expresiones, según corresponda, estudiando el valor de la pendiente de la recta.

a. $y = -7x + 2$ — Creciente

b. $x = -2$ — Decreciente

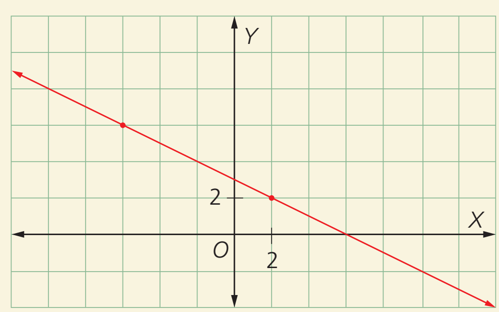
c. $y = 3$ — Vertical

d. $y = x - 1$ — Horizontal

Ecuación de la recta

Ejercitación

6. Determina la ecuación de la recta según la gráfica.



a. $y = -\frac{1}{2}x + 3$

b. $y = -6x + 3$

c. $y = \frac{1}{2}x + 3$

d. $-\frac{1}{2}x + 2{,}5$

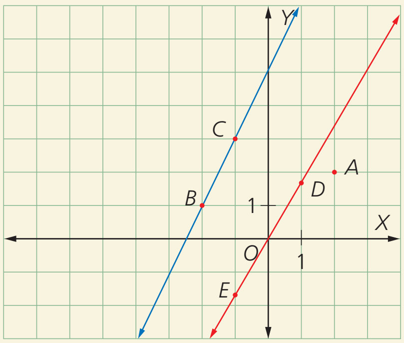
Indicadores de logro:

- Determina la monotonía de funciones.
- Resuelve ecuaciones de primer grado con una incógnita en R, de manera gráfica y/o algebraica.

Relación entre las pendientes de rectas paralelas y perpendiculares

Ejercitación

7. Responde verdadero (V) o falso (F), según corresponda. Ten en cuenta la información de la siguiente figura.



a. Si $D = (1; 1{,}8)$, la ecuación de la recta DE es $y = 1{,}8x$. ☐

b. La ecuación de la recta paralela a BC que pasa por el punto A es $y = -\frac{1}{2}x + 3$. ☐

c. DE representa una función lineal. ☐

d. $BC \parallel DE$ ☐

e. Toda recta perpendicular a DE es, a la vez, perpendicular a BC. ☐

8. Las siguientes funciones afines, se corresponden con las gráficas de la siguiente forma

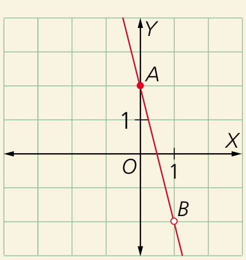
a. $f(x) = -x - 0{,}5$

b. $f(x) = \frac{x}{2} + 3$

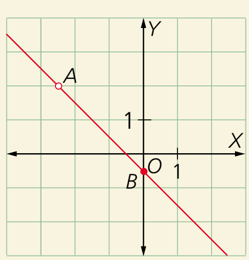
c. $f(x) = 4x - 1$

d. $f(x) = 2 - 4x$

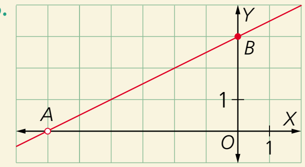
1.



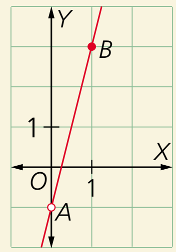
2.



3.



4.

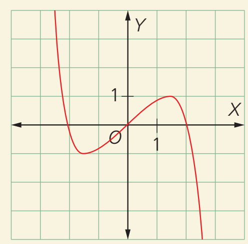


Funciones simétricas

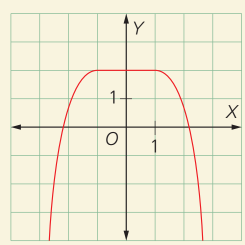
Razonamiento

9. Clasifica cada función según sea par o impar.

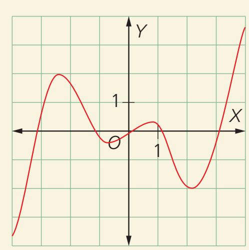
a.



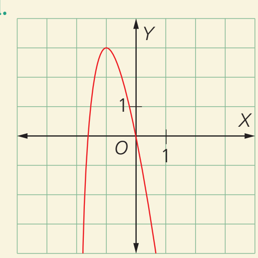
b.



c.



d.



3 Sistemas de ecuaciones lineales

BLOQUE

Álgebra
y funciones

El análisis y la resolución de sistemas de ecuaciones lineales es una de las principales herramientas utilizadas para comprender problemas relacionados con la ingeniería, la economía, la administración, los procesos de manufactura y la química, entre otras áreas del conocimiento.

- Consulta sobre los diferentes métodos de solución de los sistemas de ecuaciones lineales y escribe tres ejemplos.s.



Cultura del Buen Vivir

El optimismo

Ser optimistas nos permite afrontar diferentes situaciones con entereza, ya que esta cualidad nos ayuda a confiar en nuestras capacidades.

- ¿Cómo crees que se puede contagiar el optimismo a las demás personas?

  Da tres ejemplos.

Aprenderás...

- Sistemas de ecuaciones lineales
- Métodos de solución de sistemas de ecuaciones lineales
- Regla de Cramer
- Método de Gauss
- Inecuaciones. Sistemas

Resolución de problemas

Recursos digitales

LTIC

AI

E



SM Ediciones

Habilidades lectoras

Demanda y oferta. Punto de equilibrio

La modelación de la realidad mediante ecuaciones lineales con una o varias incógnitas permite calcular valores de las magnitudes que intervienen en ellas. Se trata de una eficaz herramienta algebraica que permite resolver numerosas situaciones relacionadas con las propias matemáticas, las ciencias de la naturaleza, las ciencias sociales y la vida cotidiana.

En el ámbito de la economía, por ejemplo, es común escuchar las expresiones función demanda, función oferta y punto de equilibrio.

La función demanda es una expresión algebraica de tipo lineal que permite calcular las unidades de un producto que los consumidores desean comprar en determinado momento, en función de su precio.

La función oferta, por su parte, es una expresión algebraica que permite calcular las unidades de un producto que los fabricantes están dispuestos a producir y vender en un determinado momento, en función de su precio.

Dadas las funciones de demanda y de oferta para un producto y para un momento determinado, se dice que hay equilibrio de mercado si existe un precio para el cual la cantidad demandada coincide con la ofertada.

Así, para calcular el punto de equilibrio en la producción de un artículo particular, basta con resolver el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} \text{Ecuación de oferta} \\ \text{Ecuación de demanda} \end{cases} \Rightarrow \text{Solución: punto de equilibrio}$$

Sm Ediciones. (2016). Colombia. Matemática 10.

Actividades

Interpreta

1. ¿Cuál es la principal utilidad de las ecuaciones y sus soluciones?

Argumenta

2. En el ámbito económico, ¿cómo se pueden interpretar las expresiones función demanda, función oferta y punto de equilibrio?

Propón

3. Consulta acerca de otros costos y gastos que intervienen en el proceso productivo. Luego, encuentra la relación entre estos y el concepto de punto de equilibrio, asociado a la formulación y resolución de sistemas de ecuaciones lineales.

1 Sistemas de ecuaciones lineales

Explora

Para ingresar a una universidad se aplica una prueba de razonamiento que consta de 30 preguntas. Por cada respuesta correcta se asignan cinco puntos, pero por cada respuesta incorrecta (o que no se responda) se restan dos puntos.


SM Ediciones

- Si un aspirante obtuvo 94 puntos, ¿cuántas preguntas respondió bien?

La situación planteada en el Explora resulta interesante, pues es posible pensar en un método de tanteo para solucionarla. Si el aspirante respondió quince preguntas bien y quince mal, el siguiente sería el esquema para el razonamiento:

15 preguntas · 5 puntos − 15 preguntas · 2 puntos = 45 puntos

Preguntas correctas   Preguntas incorrectas

De esta manera puede razonarse hasta encontrar una solución. Sin embargo, si se analiza el problema desde el punto de vista del álgebra, puede plantearse la "m" como la cantidad de las preguntas respondidas correctamente y "r" la de las preguntas respondidas de forma incorrecta. Así, el problema puede expresarse como sigue:

$$5m - 2r = 94 \quad \text{y} \quad m + r = 30$$

Si se analizan simultáneamente las expresiones anteriores, teniendo en cuenta que son las condiciones del problema, se concluye que el aspirante respondió bien 22 preguntas.

Las expresiones $5m - 2r = 94$ y $m + r = 30$ conforman un sistema de ecuaciones lineales, cuya solución es: $m = 22$ y $r = 8$

Plantear y resolver un **sistema de ecuaciones** permite resolver situaciones en las cuales se involucran varias incógnitas que están relacionadas por condiciones específicas.

1.1 Generalidades de los sistemas de ecuaciones lineales

Antes de explicar cómo resolver los sistemas de ecuaciones, vale la pena aclarar ciertos términos propios de la terminología del álgebra.

Para indicar un sistema de ecuaciones se utiliza el signo { y se escriben las ecuaciones una debajo de la otra, como se indica a continuación (Figura 1).

$$\begin{cases} 5m - 2r = 94 \\ m + r = 30 \end{cases}$$

Figura 1

Un sistema de ecuaciones puede ser 2×2 si involucra dos ecuaciones y dos incógnitas. Así mismo puede ser 3×3 si involucra tres ecuaciones y tres incógnitas o $n \times n$ si involucra n ecuaciones y n incógnitas.

Resolver un sistema de ecuaciones lineales hace referencia a encontrar los valores de las incógnitas que verifican, simultáneamente, las ecuaciones. Teniendo en cuenta esto, los sistemas pueden clasificarse así:

- **Compatibles.** Aquellos que tienen solución. Estos a su vez pueden ser:

  Compatibles determinados. Aquellos para los cuales hay una única solución.

  Compatibles indeterminados. Aquellos que tienen infinitas soluciones.

- **Incompatibles.** Aquellos que carecen de solución.

Ejemplo 1

El sistema planteado para modelar la situación inicial es compatible determinado, pues para resolverlo, solo se determina que: $m = 22$ y $r = 8$

De la misma forma, y sin saber ningún método de solución, puede determinarse que el sistema conformado por las ecuaciones $m + n = 3$ y $2m + 2n = 3$ es incompatible, pues no hay valores que verifiquen simultáneamente las dos ecuaciones.

Ten en cuenta

En algunos libros asignan otros nombres para clasificar los sistemas de ecuaciones según sus soluciones. Investiga qué otros nombres reciben.

Destreza con criterios de desempeño: Resolver un sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas de manera algebraica.

1.2 Resolución de un sistema de ecuaciones

En este subtema se trabajarán los métodos para solucionar sistemas de ecuaciones 2×2, pero cabe anotar que varios de estos sirven además para solucionar los sistemas 3×3 y, con algunas variaciones, también para solucionar sistemas $n \times n$.

Antes de hablar acerca de cómo solucionar un sistema de ecuaciones, es importante aclarar que solo puede determinarse que la solución de dicho sistema es correcta al evaluar las dos ecuaciones con los valores determinados para las incógnitas. Si las ecuaciones se verifican, la solución es correcta; de lo contrario, la solución es incorrecta.

Para el problema planteado se encontró que $m = 22$ y $r = 8$. Al verificar los valores del sistema propuesto se tiene que:

$5m - 2r = 94 \Rightarrow 5 \cdot 22 - 2 \cdot 8 = 94$

$m + r = 30 \Rightarrow 22 + 8 = 30$

Puede determinarse que $m = 15$ y $r = 15$ (como se planteó al inicio de la unidad) no es una solución para el sistema, pues para la primera ecuación, se tiene que:

$$m + r = 30 \Rightarrow 15 + 15 = 30$$

Mientras que para la segunda ecuación, se tiene que:

$$5m - 2r = 94 \Rightarrow 5 \cdot 15 - 2 \cdot 15 = 45$$

Aunque se verifica la ecuación $m + r = 30$, puede observarse que para la ecuación $5m - 2r = 94$, los valores no proporcionan una igualdad; por esta razón no son una solución del sistema planteado.

Existen varios métodos para solucionar un sistema de ecuaciones 2×2 y el uso de cada uno de ellos depende de las condiciones del sistema y de la habilidad propia de cada uno para utilizarlo. Los métodos son:

- Gráficas de las ecuaciones lineales
- Sustitución
- Reducción
- Igualación
- Regla de Cramer
- Método de Gauss

A continuación se presentan algunas particularidades de cada método.

- **Sustitución, reducción e igualación.** Estos métodos tienen un componente algebraico importante; para usarlos, se interpreta cada expresión de forma similar a una ecuación, por tal razón se usa la propiedad uniforme de la igualdad y se respeta el orden en el que se despeja una incógnita en la ecuación.

- **Regla de Cramer.** Con este método se solucionan sistemas de ecuaciones partiendo del uso de los coeficientes numéricos de cada incógnita. De esta manera, se "obvia" el proceso algebraico para usar un algoritmo aritmético en la solución.

- **Método de Gauss.** Es una generalización del método de reducción.

Cada uno de los métodos se explicará con mayor detalle en los siguientes temas de la unidad.

CULTURA del Buen Vivir

El optimismo

Cuando una persona analiza desde una perspectiva optimista las diversas situaciones que enfrenta en la vida, encuentra más rápidamente las soluciones a los problemas que se le presenten.

- Piensa en qué le aconsejarías a tu mejor amigo cuando tiene serias dificultades para entender los temas de matemáticas.

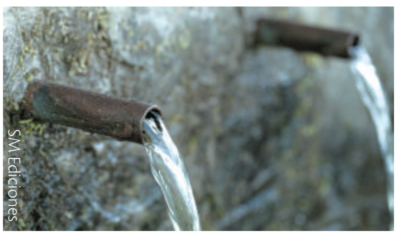
Ten en cuenta

Según la propiedad uniforme de la igualdad, pueden sumarse, restarse, multiplicarse o dividirse en ambos miembros de una igualdad por un mismo número y la igualdad se conserva.

2 Resolución de sistemas por el método gráfico

Explora

Para llenar un tanque de 31 m^3 se abren dos llaves, simultáneamente. Una de ellas se cierra siete minutos después de abrirla y la otra, dos minutos después. Luego, se llena un tanque de 27 m^3 con las mismas llaves, pero ahora la primera se cierra a los cuatro minutos de abrirla y la segunda, a los tres minutos.



- ¿Cuántos litros salen de cada llave en un minuto?

En la situación presentada en el Explora puede observarse que los litros que salen de las dos llaves pueden representarse por dos incógnitas, por ejemplo, x **y** y.

Según las condiciones del problema, la relación entre x **y** y. puede expresarse así:

Para el tanque de 31 m^3: $7x + 2y = 31$

Para el tanque de 27 m^3: $4x + 3y = 27$

Así, para responder la situación debe solucionarse el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} 7x + 2y = 31 \\ 4x + 3y = 27 \end{cases}$$

Es posible hallar la **solución del sistema** analizando cada ecuación como una recta y, por tanto, el sistema se entendería como dos rectas que se intersectan en un solo punto.

Las coordenadas de dicho punto son los valores que satisfacen simultáneamente las dos ecuaciones.

Ejemplo 1

Para solucionar el anterior sistema de ecuaciones, cada una de las ecuaciones generales tiene que transformarse en ecuaciones de la forma $y = mx + b$ punto-pendiente.

Las ecuaciones son:

$$y = \frac{31}{2} - \frac{7x}{2} \qquad y = -\frac{4x}{3} + 9$$

Para la primera ecuación se tiene que: $m = -\frac{7}{2}$ y $b = \frac{31}{2}$

Para la segunda ecuación se tiene que: $m = -\frac{4}{3}$ y $b = 9$

Ahora se grafican las ecuaciones, conservando una escala adecuada, y se busca el punto que las dos rectas tienen en común.

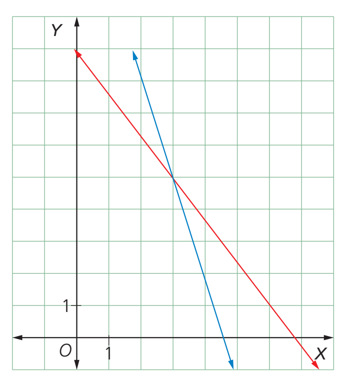


Figura 1

En la Figura 1, se observa que el punto en el cual se intersectan las dos rectas es (3, 5); es decir la solución del sistema es $x = 3$; $y = 5$.

Por lo tanto, de la primera llave salen 3 litros de agua en un minuto y de la segunda salen 5 litros de agua en un minuto.

Ten en cuenta

Es posible hacer las gráficas de las rectas usando dos puntos; en la situación de la sección Explora, se usa la aplicación de la ecuación punto-pendiente.

Destreza con criterios de desempeño: Reconocer a la intersección de dos rectas cómo la solución gráfica de un sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas con el uso de la tecnología.

2.1 Análisis de la cantidad de soluciones de un sistema de ecuaciones

Gráficamente es posible identificar sistemas de ecuaciones compatibles determinados, compatibles indeterminados e incompatibles.

Ejemplo 2

A continuación se muestran gráficas de los diferentes tipos de sistemas:

Compatible determinado: Cuando las rectas se cortan en un punto.

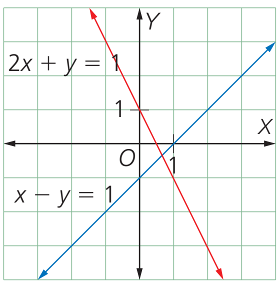


Figura 2

Compatible indeterminado: Cuando las rectas se cortan en infinitos puntos (misma recta).

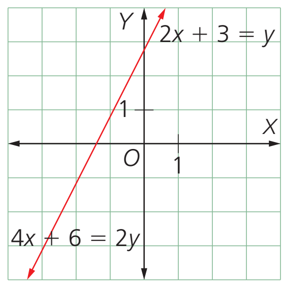


Figura 3

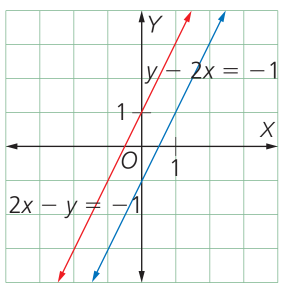


Figura 4

Incompatible: Cuando las rectas son paralelas.

TECNOLOGÍAS de la información y la comunicación

www.e-sm.net/9smt05

Observa este video para repasar el método gráfico de resolución de sistemas de ecuaciones lineales.

Actividad resuelta

Razonamiento

1 Determina, gráficamente, el tipo de solución de cada uno de los siguientes sistemas de ecuaciones:

$$\begin{cases} 4x - 2y = 2 \\ 2x - 5 = y \end{cases} \qquad \begin{cases} 2x + 5y = 10 \\ 4x + 15y = 30 \end{cases} \qquad \begin{cases} 3x + 9y = 18 \\ 5x + 15y = 30 \end{cases}$$

Solución:

Cada una de las ecuaciones de los tres sistemas se escribe de la forma $y = mx + b$. Luego, se procede a graficar y se obtienen las Figuras 5 a 7 que se corresponden con los sistemas:

$$\begin{cases} 4x - 2y = 2 \\ 2x - 5 = y \end{cases} \qquad \begin{cases} 2x + 5y = 10 \\ 4x + 15y = 30 \end{cases} \qquad \begin{cases} 3x + 9y = 18 \\ 5x + 15y = 30 \end{cases}$$

Incompatible — Compatible determinado — Compatible indeterminado

El 1.er sistema, debido a que las ecuaciones tienen la misma pendiente y no pasan por un mismo punto, es incompatible.

El 3.er sistema, por ser una ecuación equivalente a la otra es compatible indeterminado.

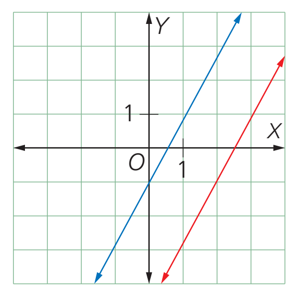


Figura 5

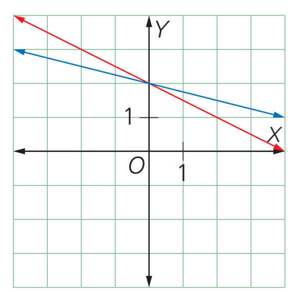


Figura 6

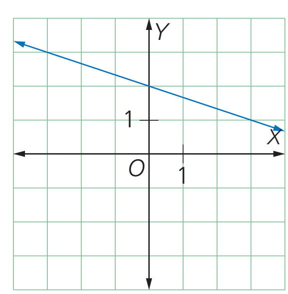


Figura 7

2 Resolución de sistemas por el método gráfico

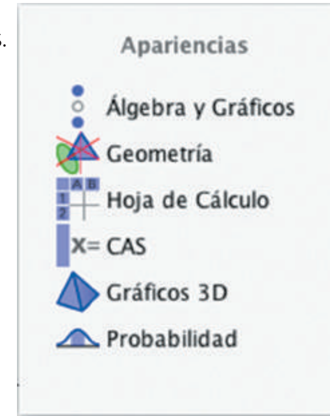
MatemaTICS

Grafica sistemas de ecuaciones con GeoGebra

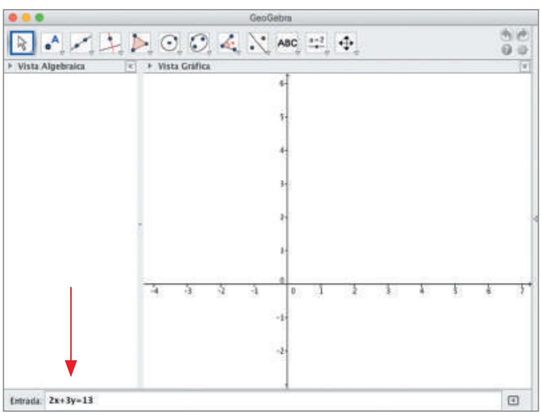
A continuación se presenta el procedimiento para graficar el sistema de ecuaciones.

$$\begin{cases} 2x + 3y = 13 \\ 4x - y = 5 \end{cases}$$

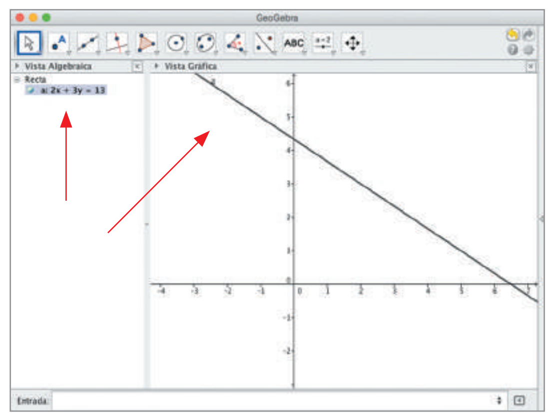
- Primero, en el menú **Apariencias,** selecciona la opción **Álgebra y Gráficos**. Después de hacerlo, verás una pantalla como la que se muestra a la derecha.



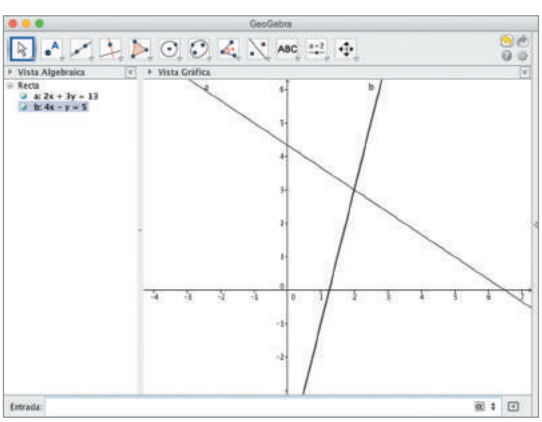
- Luego, en la parte inferior de la ventana encontrarás una barra llamada **Entrada**. En este lugar se digita la ecuación de la función que vas a graficar.



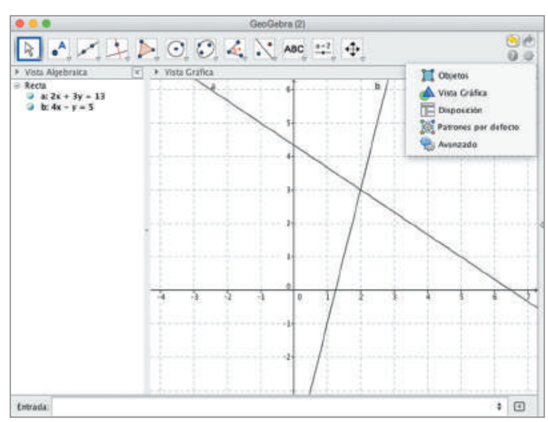
- Al presionar la tecla **Enter**, aparece la gráfica en el plano y la ecuación correspondiente en la ventana al margen izquierdo.



- Repite el procedimiento para la segunda ecuación.



Para determinar las coordenadas del punto de intersección pon una cuadrícula a la ventana de las gráficas. Para ello, selecciona en la parte superior derecha el menú **Preferencias**. Allí, elige **Vista gráfica**, luego activa la **Cuadrícula** dando clic en la opción **Mostrar cuadrícula**.



Destreza con criterios de desempeño: Reconocer a la intersección de dos rectas cómo la solución gráfica de un sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas.

Desarrolla tus destrezas

Ejercitación

2 Grafica en el plano cartesiano las ecuaciones de cada sistema. Luego, determina su solución.

a. $\begin{cases} x + y = 3 \\ 2x - 2y = 1 \end{cases}$

b. $\begin{cases} x - y = 2 \\ 0{,}2x + 0{,}5y = 0{,}1 \end{cases}$

c. $\begin{cases} x = -1 + y \\ x + y = 1 \end{cases}$

d. $\begin{cases} x + 2y = -2 \\ 3x - y = 5 \end{cases}$

Razonamiento

3 Determina la solución del sistema de ecuaciones en cada caso. Verifícala, reemplazándola en las ecuaciones.

a.

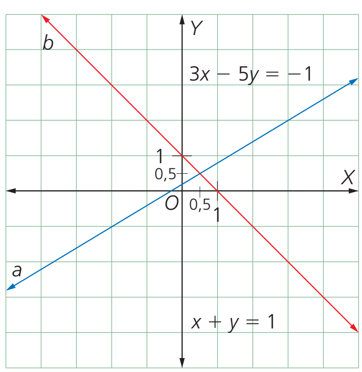


Figura 8

b.

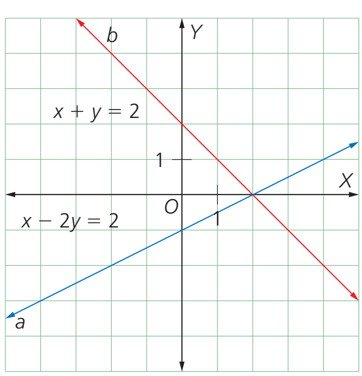


Figura 9

4 Propón una ecuación que forme un sistema de ecuaciones con $6x - 2y = -3$ de tal forma que sea:

a. Determinado

b. Indeterminado

c. Incompatible

Luego, representa la solución gráfica de cada uno de los sistemas que planteaste.

Finalmente, explica las diferencias, tanto en las gráficas como en las ecuaciones, de los tres sistemas.

Comunicación

5 Determina la ecuación de las rectas del sistema dado. Luego, los valores aproximados para su solución.

a.

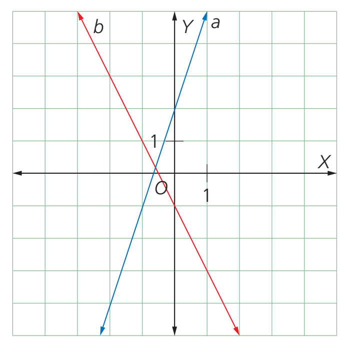


Figura 10

b.

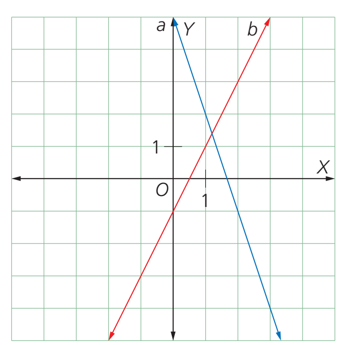


Figura 11

Resolución de problemas

6 Plantea un sistema de ecuaciones que tenga la solución dada. Ubica dicho punto en el plano y grafica las rectas que forman el sistema que propusiste.

a. $x = 2 \quad y = 21$

b. $x = 4{,}5 \quad y = 2$

c. $x = -2 \quad y = -0{,}5$

3 Resolución de sistemas por el método de sustitución

Explora

En una granja hay patos y cerdos. Al contar las cabezas hay 50 y al contar las patas hay 134.



- ¿Cuántos animales hay de cada especie?

El sistema de ecuaciones que representa la situación del Explora puede resolverse con el método de sustitución. Si se tiene en cuenta que los cerdos tienen cuatro patas y los patos, dos, las condiciones pueden representarse así:

m: cantidad de patos n: cantidad de cerdos

Total de cabezas entre todos los animales: $m + n = 50$

Total de patas entre todos los animales: $2m + 4n = 134$

$$\begin{cases} m + n = 50 \\ 2m + 4n = 134 \end{cases}$$

Otra manera de solucionar un sistema de ecuaciones se basa en el principio lógico de la **sustitución**, en el cual se propone escribir una incógnita en términos de la otra para una de las ecuaciones y, después, sustituir esta expresión en la otra ecuación.

Para esta situación, el principio de sustitución se aplica como sigue:

$m = 50 - n$ ← Se despeja m en la primera ecuación del sistema.

$2(50 - n) + 4n = 134$ ← Se sustituye $m = 50 - n$ en la segunda ecuación.

$100 - 2n + 4n = 134$ ← Se aplica la propiedad distributiva del producto.

$100 + 2n = 134$ ← Se despeja n.

$2n = 134 - 100 \Rightarrow n = \dfrac{34}{2} \Rightarrow n = 17$

Por tanto, la cantidad de cerdos es 17. Ahora, para averiguar la cantidad de patos, se reemplaza este valor en la expresión $m = 50 - n$, así: $m = 50 - 17 = 33$. De esta manera en la granja hay 17 cerdos y 33 patos.

Ejemplo 1

Observa cómo se resuelve el siguiente sistema de ecuaciones.

$$\begin{cases} x + 2y = -3 \\ 3x + 6y = -9 \end{cases}$$

Se elige la primera ecuación y se despeja x. Luego se realiza el proceso de sustitución como en la situación inicial: $x = -3 - 2y$.

Después, este valor se sustituye en la segunda ecuación.

$$3(-3 - 2y) + 6y = -9 \Rightarrow -9 - 6y + 6y = -9 \Rightarrow -9 = -9$$

Como esta igualdad siempre es cierta, se deduce que el sistema tiene infinitas soluciones; así que es compatible indeterminado. Gráficamente se interpreta que las dos ecuaciones generan la misma recta, como se observa en la Figura 1.

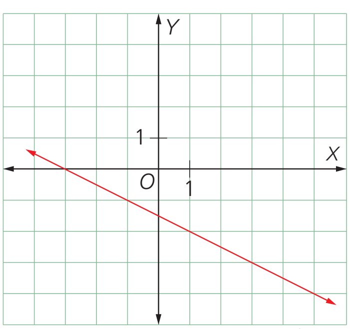


Figura 1

Actividad resuelta

Razonamiento

1 Resuelve este sistema de ecuaciones $\begin{cases} 2x + y = 1 \\ 3x + 2y = 4 \end{cases}$.

Solución:

Se despeja y en la primera ecuación $y = 1 - 2x$. Luego, se sustituye en la segunda: $3x + 2(1 - 2x) = 4 \Rightarrow 3x + 2 - 4x = 4 \Rightarrow -x = 4 - 2$

$$-x = 2$$

De donde se deduce que $x = -2$ y al reemplazar x en la primera ecuación, se obtiene el valor de $y = 5$.

Destreza con criterios de desempeño: Resolver un sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas de manera algebraica utilizando los métodos de determinante (Cramer), método de igualación y método de eliminación gaussiana.

Desarrolla tus destrezas

Ejercitación

2 Resuelve los siguientes sistemas de ecuaciones con el método de sustitución.

a. $\begin{cases} x - 5y = 8 \\ -7x + 8y = 25 \end{cases}$

b. $\begin{cases} 5m - 2n = 13 \\ m + 3n = 6 \end{cases}$

c. $\begin{cases} 2w + 5z = -24 \\ 8w - 3z = 19 \end{cases}$

d. $\begin{cases} 7a - 9b = 8 \\ 15a + 11b = 32 \end{cases}$

3 Con el método de sustitución, resuelve cada sistema. Luego, reemplaza la letra correspondiente al sistema y completa la frase.

Completa esta frase solo con el valor de la solución en la incognita *y*.

a. $\begin{cases} \dfrac{x-1}{4} + y = 2 \\ 1 - \dfrac{1+x}{2} = y - 1 \end{cases}$ Letra N

b. $\begin{cases} \dfrac{x}{7} - \dfrac{3y}{4} = 7 \\ \dfrac{x}{7} + \dfrac{y}{8} = 0 \end{cases}$ Letra I

c. $\begin{cases} \dfrac{x}{5} = \dfrac{y}{4} \\ \dfrac{x}{3} - 1 = \dfrac{y}{3} \end{cases}$ Letra L

d. $\begin{cases} \dfrac{y}{8} - \dfrac{5x}{6} = 2 \\ \dfrac{2x}{3} - \dfrac{3y}{4} = 1 \end{cases}$ Letra A

e. $\begin{cases} 12x + 5y = -6 \\ \dfrac{5x}{3} - \dfrac{7y}{6} = -12 \end{cases}$ Letra S

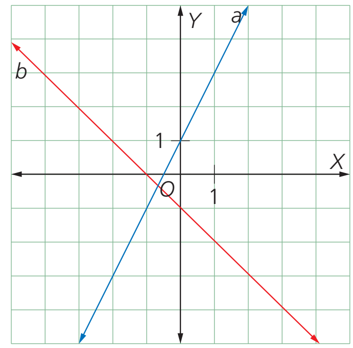
Para solucionar problemas de matemáticas es necesario desarrollar la capacidad de

___	___	___	___	___	___	___	___
−4	3	−4	12	−8	6	−8	6

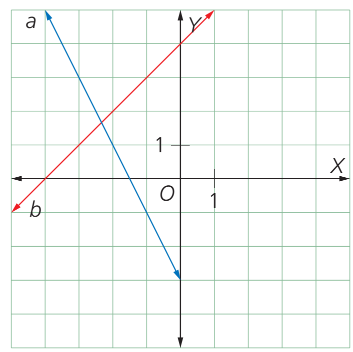
Razonamiento

4 Identifica las ecuaciones de las rectas para cada sistema y determina, con el método de sustitución, los valores exactos de la solución.

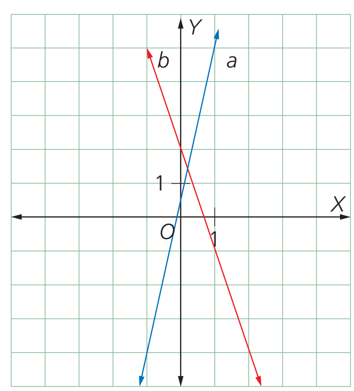
a.



b.



c.



Resolución de problemas

5 Analiza los siguientes sistemas y determina el valor que debe tomar *a* o *b* para que el sistema cumpla la condición dada.

a. $\begin{cases} x + y = 1 \\ 3x - ay = 4 \end{cases}$ Compatible determinado
Incompatible

b. $\begin{cases} 4x + by = 5 \\ -2x + y = 4 \end{cases}$ Compatible determinado
Compatible indeterminado

4 Resolución de sistemas por el método de reducción

Explora

Martha va al supermercado y compra 4 kg de café y 2 kg de azúcar por $ 10. Días después, nota que no fue suficiente, así que vuelve al supermercado a comprar 1 kg de café y 2 kg de azúcar por $ 4.



- ¿Cuánto cuesta 1 kg de cada producto?

Ten en cuenta

El método de reducción sirve cuando se determina que no es sencillo despejar una de las dos incógnitas del sistema de ecuaciones.

CULTURA del Buen Vivir

El optimismo

Cuando se es optimista se toman buenas decisiones, porque es posible tener la mente clara para vislumbrar los mejores caminos.

- ¿Por qué crees que es importante tener una actitud optimista frente a la vida? Explica.

Como se ha estudiado en temas anteriores, algunas situaciones en las que se observa una relación entre dos datos pueden resolverse al plantear y resolver un sistema de ecuaciones.

En este caso, las iniciales de cada producto serán las incógnitas al momento de plantear el sistema correspondiente a la situación del Explora.

Sea C: el precio de un kilogramo de café y A: el precio de un kilogramo de azúcar.

Según los datos del problema, se tiene que: $4C + 2A = 10$ y $C + 2A = 4$. Así puede plantearse el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} 4C + 2A = 10 \\ C + 2A = 4 \end{cases}$$

Al solucionar un sistema de ecuaciones por el **método de reducción,** se intenta eliminar una de las incógnitas en el sistema de ecuaciones para resolver inicialmente una ecuación de primer grado. Con esta solución, se despeja el valor faltante en una de las dos ecuaciones.

Ejemplo 1

Para solucionar el sistema por el método de reducción pueden seguirse los pasos que se describen a continuación:

1.° Se determina la incógnita que va a eliminarse; en este caso será C.

2.° Se multiplica convenientemente, incluso por un número negativo, una o las dos ecuaciones para poder **reducirlas**. Para el caso, se multiplica la segunda ecuación por -4. Con lo cual el sistema se transforma en:

$$\begin{cases} 4C + 2A = 10 \\ -4C - 8A = -16 \end{cases}$$

3.° Se reducen las ecuaciones sumando entre sí los términos semejantes y los valores numéricos de esta manera:

$$\begin{array}{rl} 4C + 2A & = 10 \\ -4C - 8A & = -16 \\ \hline -6A & = -6 \end{array}$$

En este caso, la incógnita C se eliminó de la expresión y el resultado de la reducción es una ecuación con una sola incógnita que es A.

4.° Se soluciona la ecuación así: $-6A = -6$; **y** se obtiene que $A = 1$.

5.° Se reemplaza el valor $A = 1$ en una de las ecuaciones:

$$C + 2A = 4 \Rightarrow C = 4 - 2 \Rightarrow C = 2.$$

Así que un kilogramo de azúcar cuesta $ 1 y un kilogramo de café cuesta $ 2.

Actividad resuelta

Ejercitación

1 Observa la solución del sistema $\begin{cases} 3x - 2y = -2 \\ 5x + 8y = -60 \end{cases}$.

Solución:

Para eliminar x se multiplica la primera ecuación por 5 y la segunda por -3 de esta manera: $\begin{cases} 15x - 10y = -10 \\ -15x - 24y = 180 \end{cases}$, y al reducir se tiene que: $-34y = 170$.

Así, $y = -5$ **y** al despejar una de las ecuaciones para x se tiene que $x = -4$.

Destreza con criterios de desempeño: Resolver un sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas de manera algebraica, utilizando el método de reducción.

Desarrolla tus destrezas

Ejercitación

2 Grafica, en el plano cartesiano, las ecuaciones de cada sistema. Luego, determina su solución aplicando el método de reducción.

a. $\begin{cases} 4x + 3y = 18 \\ 5x - 6y = 3 \end{cases}$ b. $\begin{cases} 3x + 8y = 34 \\ 5x + 6y = 20 \end{cases}$

c. $\begin{cases} 2x + 3y = 12 \\ x - y = 1 \end{cases}$ d. $\begin{cases} 5x + 7y = 50 \\ 9x + 14y = 97 \end{cases}$

Razonamiento

3 Relaciona cada sistema de ecuaciones con su correspondiente gráfica. Luego, resuélvelo aplicando el método de reducción:

a. $\begin{cases} 2x + 5y = 1 \\ 6x + 7y = 3 \end{cases}$ b. $\begin{cases} 3x + 3y = 10 \\ 3x - 7y = 20 \end{cases}$

c. $\begin{cases} 8x - 15y = -30 \\ 2x + 3y = 15 \end{cases}$ d. $\begin{cases} x + 2y = -3 \\ 3x + 6y = -9 \end{cases}$

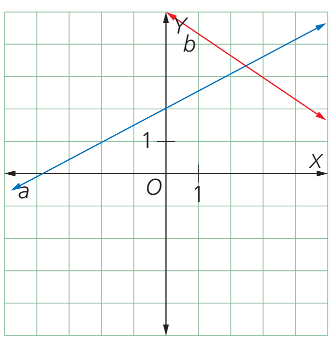


Figura 1

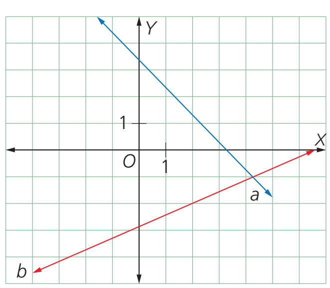


Figura 2

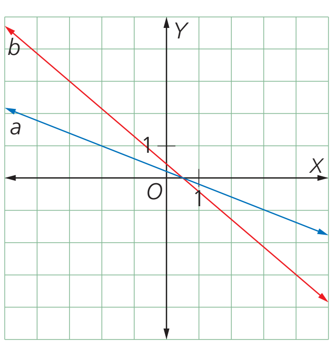


Figura 3

Modelación

4 Inventa para cada caso una nueva ecuación con la cual puedas formar un sistema de ecuaciones que cumpla las condiciones dadas:

a. $\begin{cases} 7x - 3y = 27 \\ \quad \end{cases}$ Compatible determinado

b. $\begin{cases} 5x + 6y = 27 \\ \quad \end{cases}$ Compatible indeterminado

c. $\begin{cases} 3x - 4y = 11 \\ \quad \end{cases}$ Incompatible

d.

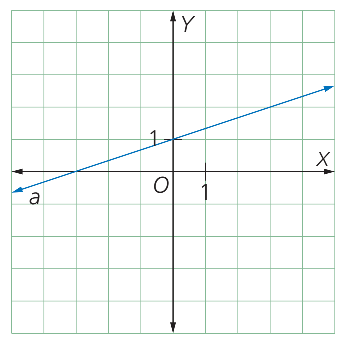


Figura 4

Incompatible

e.

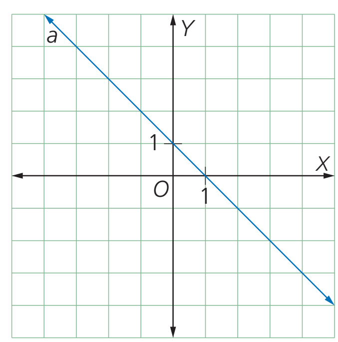


Figura 5

Compatible indeterminado

Resolución de problemas

5 Observa el siguiente sistema de ecuaciones y luego responde las preguntas.

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = 0 \\ a_2x + b_2y = 0 \end{cases}$$

a. ¿Cuál sería la solución de dicho sistema? Escríbela en términos de a_1, b_1, a_2 y b_2.

b. ¿Para qué valores de a_2 y b_2 tiene el sistema infinitas soluciones?

5 Resolución de sistemas por el método de igualación

Explora

La suma de dos números es 51. Si se divide el primero entre tres y el segundo entre 6, la diferencia de estas fracciones es 1.



- ¿Qué par de números verifican estas condiciones?

Para plantear el sistema de ecuaciones de la situación propuesta en el Explora se consideran las siguientes incógnitas:

x: primer número y: segundo número

$$\begin{cases} x + y = 51 \\ \dfrac{x}{3} - \dfrac{y}{6} = 1 \end{cases}$$ ← Sistema de ecuaciones que describe la situación

El **método de igualación** para solucionar sistemas de ecuaciones consiste en despejar la misma incógnita en las dos ecuaciones y luego, aplicando la transitividad de las igualdades, se igualan y se despeja la otra incógnita.

Ejemplo 1

El sistema presentado en la situación inicial se soluciona de la siguiente manera:

1.° Se despeja y en las dos ecuaciones.

$$\begin{cases} y = -x + 51 \\ y = 2x - 6 \end{cases}$$

2.° Se igualan los valores de y.

$$-x + 51 = 2x - 6$$

3.° Se despeja x.

$$-x - 2x = -6 - 51$$
$$-3x = -57$$
$$x = 19$$

4.° Se calcula el valor de y.

$$y = -x + 51, \text{ de donde } y = 32$$

Así, los dos números que solucionan el reto son 19 y 32.

Ten en cuenta

Despejar la variable y en las ecuaciones de un sistema, permite que las ecuaciones queden presentadas como ecuaciones canónicas de las rectas.

Actividad resuelta

Ejercitación

1 Resuelve el sistema $\begin{cases} 7m - 3n = 15 \\ 5m + 6n = 27 \end{cases}$.

Solución:

En este caso se elige m para despejar en las dos ecuaciones:

$7m = 15 + 3n \Rightarrow m = \dfrac{15 + 3n}{7}$ y $5m = 27 - 6n$, luego, $m = \dfrac{27 - 6n}{5}$

Ahora se igualan las expresiones y se despeja n: $\dfrac{15 + 3n}{7} = \dfrac{27 - 6n}{5}$

$$\begin{aligned} 5(15 + 3n) &= 7(27 - 6n) \\ 75 + 15n &= 189 - 42n \\ 15n + 42n &= 189 - 75 \\ 57n &= 114 \\ n &= 2 \end{aligned}$$

Se reemplaza el valor de n en una de las dos ecuaciones despejadas para así hallar el valor de m: $m = \dfrac{15 + 3n}{7}$, así para $n = 2$ se tiene que $m = \dfrac{15 + 3(2)}{7}$; $m = 3$.

La solución para el sistema será $m = 3$ y $n = 2$ (Figura 1).

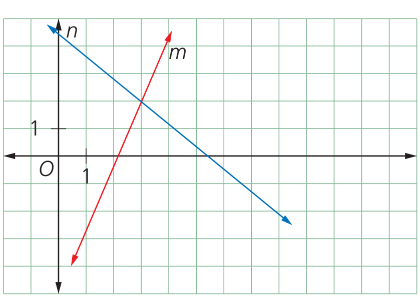


Figura 1

Destreza con criterios de desempeño: Resolver un sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas de manera algebraica, utilizando el método de igualación.

Desarrolla tus destrezas

Ejercitación

2 Resuelve los siguientes sistemas con el método de igualación.

a. $\begin{cases} 3x = -4y \\ 5x - 6y = 38 \end{cases}$ b. $\begin{cases} 5a + 2b = 15 \\ 2a + b = 5 \end{cases}$

c. $\begin{cases} w - 2z = 10 \\ 2w + 3z = -8 \end{cases}$ d. $\begin{cases} 3s + 4t = 15 \\ 2s + t = 5 \end{cases}$

e. $\begin{cases} \frac{x}{3} + \frac{y}{4} = -\frac{7}{12} \\ \frac{x}{2} + \frac{y}{3} = -\frac{1}{6} \end{cases}$ f. $\begin{cases} \frac{x}{3} + \frac{y}{4} = 6 \\ 3x - 4y = 4 \end{cases}$

Razonamiento

3 Descubre el error en el proceso y justifica por qué los valores dados no son la solución del sistema planteado.

a. $\begin{cases} 7m + 4n = 13 \\ 5m - 2n = 19 \end{cases}$

$4n = 13 - 7m$ $5m - 2n = 19$

$n = \dfrac{13 - 7m}{4}$ $n = \dfrac{19 + 5m}{2}$

$\dfrac{13 - 7m}{4} = \dfrac{19 + 5m}{2}$

$26 - 14m = 76 + 20m$

$-14m - 20m = 76 - 26$ $-34m = 50$

$m = -\dfrac{50}{34} = -\dfrac{25}{17}$

Reemplazando para n se tiene que:

$$n = \dfrac{13 - 7\left(-\dfrac{25}{17}\right)}{4} = \dfrac{99}{17}$$

De este modo $m = -\dfrac{25}{17}$ y $n = \dfrac{99}{17}$.

b. $\begin{cases} x + 2y = 10 \\ 2x + 4y = 5 \end{cases}$

$x = 10 - 2y$ $x = \dfrac{5 - 4y}{2}$

$10 - 2y = \dfrac{5 - 4y}{2}$ $20 - 2y = 5 - 4y$

$-2y + 4y = 5 - 20$ $y = -\dfrac{15}{2}$

Remplazando para x se tiene que:

$$x = \dfrac{5 - 4\left(-\dfrac{15}{2}\right)}{2} = \dfrac{35}{2}$$

De este modo $x = \dfrac{35}{2}$ y $y = -\dfrac{15}{2}$.

Razonamiento

4 Utiliza las siguientes ecuaciones para plantear dos sistemas de ecuaciones incompatibles, dos compatibles indeterminados y dos compatibles determinados.

$2x - y = 1$ $x + y = 5$

$x - y = 12$ $x + y = 100$

$-2y + 5x = 10$ $2y - x = -3$

$2x - y = -3$ $2x + 10y = 40$

$3x - 30y = 15$ $3x + 3y = 15$

$-8y + 20x = 40$ $2y - x = 1$

5 Reúnete con cuatro compañeros más y solucionen el siguiente sistema de ecuaciones a partir de los cinco métodos trabajados en la unidad.

$$\begin{cases} 1{,}5x - 2y = 1 \\ 2{,}5x - 3y = 6 \end{cases}$$

Cada uno elegirá uno de los métodos. Al terminar, comparen sus soluciones y evalúen cuál es el método más efectivo para este sistema.

Resolución de problemas

6 Halla dos números tales que si se divide el primero entre 3 y el segundo entre 4, la suma sea 15; mientras que si se multiplica el primero por 2 y el segundo por 5, la suma sea 174.

7 Un número consta de dos cifras cuya suma es 9. Si se invierte el orden de las cifras el resultado es igual al número dado más 9 unidades. Halla dicho número.

8 Un número está formado por dos cifras cuya suma es 15. Si a la cuarta parte del número se le suma 45, el resultado es el número con las cifras invertidas. ¿Cuál es el número?

6 Resolución de problemas mediante sistemas de ecuaciones

Explora

Hace 4 años la edad de Cristina era el doble de la de Juliana. Dentro de 8 años la edad de Juliana será $\frac{5}{8}$ de la de Cristina.



www.unicef.es

- ¿Qué edad tienen actualmente Cristina y Juliana?

La resolución de problemas es uno de los aspectos más importantes de las matemáticas y, en muchas situaciones, los problemas tienen solución desde el álgebra.

Este es el caso de los problemas que relacionan edades; por ejemplo, para la situación planteada en el Explora, pueden definirse incógnitas y condiciones para estas según el contexto de la situación, así:

x: la edad actual de Cristina

y: edad actual de Juliana

Plantear y solucionar un problema en el que se involucran sistemas de ecuaciones se basa en escribir en forma algebraica, con incógnitas, las diferentes condiciones del problema. Luego, el sistema generado se resuelve con alguno de los métodos estudiados anteriormente y se determina la respuesta al problema.

Ejemplo 1

Según los datos del problema:

$x - 4$: edad de Cristina hace 4 años

$y - 4$: edad de Juliana hace 4 años

$$x - 4 = 2(y - 4)$$

Además:

$x + 8$: edad de Cristina dentro de 8 años

$y + 8$: edad de Juliana dentro de 8 años

$$\frac{5}{8}(x + 8) = (y + 8)$$

Así las condiciones planteadas en el problema forman un sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{cases} x - 4 = 2(y - 4) \\ \frac{5}{8}(x + 8) = (y + 8) \end{cases}$$

La solución de este sistema determinará las edades actuales de Cristina y de Juliana.

Por el método de sustitución se tiene que:

$$x = 2(y - 4) + 4 \qquad x = 2y - 8 + 4 \qquad x = 2y - 4$$

Ahora, se reemplaza x en la segunda ecuación y se tiene que:

$$\frac{5}{8}(2y - 4 + 8) = y + 8$$

$$10y + 20 = 8y + 64$$

$$10y - 8y = 64 - 20 \quad \Rightarrow \quad 2y = 44$$

De esta manera, $y = 22$ y $x = 2y - 4$. Por lo tanto, $x = 40$.

En conclusión, Cristina tiene 40 años y Juliana tiene 22.

Al finalizar la solución, es importante verificar que la respuesta hallada cumpla las condiciones y el contexto del problema. Para ello, se reemplazan los valores en el sistema de ecuaciones, así:

$$\begin{cases} 40 - 4 = 2(22 - 4) \\ \frac{5}{8}(40 + 8) = 22 + 8 \end{cases}$$

Ten en cuenta

Puede elegirse cualquiera de los métodos de solución presentados en la unidad; la idea es usar aquel que pueda aplicarse con mayor facilidad.

Destreza con criterios de desempeño: Resolver y plantear problemas de texto con enunciados que involucren funciones lineales y sistemas de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas e interpretar y juzgar la validez de las soluciones obtenidas dentro del contexto del problema.

Actividades resueltas

Resolución de problemas

1 En una gran rebaja Pablo pagó \$50 por 3 chompas de colores y 5 pantalones. Lucía compró 5 chompas y 7 pantalones por \$74 . ¿Cuánto cuesta cada chompa? ¿Cuánto cuesta cada pantalón?

En ocasiones resulta útil organizar las condiciones del problema en una tabla.

Información	Expresión algebraica
Precio de una chompa	x
Precio de 3 chompas	$3x$
Precio de 5 chompas	$5x$
Precio de un pantalón	y
Precio de 5 pantalones	$5y$
Precio de 7 pantalones	$7y$
Dinero que paga Pablo	$3x + 5y = 50$
Dinero que paga Lucía	$5x + 7y = 74$

Tabla 1

Para resolver el sistema con el método de reducción se multiplica la primera ecuación por 5 y la segunda por -3:

$$\begin{array}{r} 15x + 25y = 250 \\ -15x - 21y = -222 \\ \hline 4y = 28 \\ y = 7 \end{array}$$

Ahora se despeja x en la primera ecuación:

$3x = 50 - 5y$ y como $y = 7$, se tiene que:

$3x = 50 - 5(7)$ $\quad 3x = 50 - 35$

$x = 5$

Una chompa cuesta \$5 y un pantalón cuesta \$ 7.

2 Dos números están en relación 3 a 4. Si el menor se aumenta en 2 y el mayor se disminuye en 9, la relación es 4 a 3. ¿Qué par de números verifican esta relación?

Se determinan las incógnitas así: w: número mayor y z: número menor.

La expresión "están en relación 3 a 4" puede escribirse $\frac{z}{w} = \frac{3}{4}$.

Ahora, la expresión "si el menor se aumenta en 2 y el mayor se disminuye en 9, la relación es 4 a 3" puede escribirse así: $\frac{z+2}{w-9} = \frac{4}{3}$.

Por lo tanto, el sistema que describe el problema será:

$$\begin{cases} \frac{z}{w} = \frac{3}{4} \\ \frac{z+2}{w-9} = \frac{4}{3} \end{cases}$$

El sistema organizado convenientemente se transforma en:

$\begin{cases} 4z - 3w = 0 \\ 3z - 4w = -42 \end{cases}$, para el cual $z = 18$ y $w = 24$.

Por lo tanto, el número menor es 18 y el número mayor es 24.

En la calculadora

Para verificar si los valores encontrados al resolver un sistema de ecuaciones es correcto, se puede emplear la calculadora. Por ejemplo en la actividad 1, se puede digitar la siguiente secuencia.

3 x (5) + 5 x (7) EXE

Y se obtiene 50.

- Utiliza la calculadora para verificar la solución del problema resuelto en la actividad 2.

Ten en cuenta

La expresión $\frac{z+2}{w-9} = \frac{4}{3}$ es equivalente a la expresión

$3(z + 2) = 4(w - 9)$.

6 Resolución de problemas mediante sistemas de ecuaciones

Desarrolla tus destrezas

Comunicación

3 Selecciona el sistema de ecuaciones que modela el problema y encuentra la repuesta a la pregunta. Hay más de un sistema correcto.

Alex y Felipe son carpinteros. La materia prima necesaria para hacer un mueble grande les cuesta \$500 y para un mueble pequeño \$300. Si tienen \$57 000 y quieren hacer 150 muebles, ¿cuántos muebles de cada tamaño podrán hacer?

a. $\begin{cases} 500x + y = 150 \\ x + 300y = 57\,000 \end{cases}$

b. $\begin{cases} x + y = 150 \\ 5x + 3y = 570 \end{cases}$

c. $\begin{cases} x + y = 150 \\ 500x + 300y = 57\,000 \end{cases}$

d. $\begin{cases} x + y = 57000 \\ 500x + 300y = 150 \end{cases}$

Modelación

4 Plantea un problema cuya representación algebraica sea el sistema de ecuaciones dado.

a. $\begin{cases} x + y = 13 \\ x - y = 1 \end{cases}$

b. $\begin{cases} 3x - 30y = 15 \\ 2x + 10y = 40 \end{cases}$

c. $\begin{cases} 8x + 3y = 37 \\ 8x - 3y = 50 \end{cases}$

d. $\begin{cases} x - 5y = 4 \\ 3x + 5y = 32 \end{cases}$

e. $\begin{cases} 2x - y = 5 \\ -2x + 4y = 6 \end{cases}$

f. $\begin{cases} 3x + y = 40 \\ 5x - 7y = -20 \end{cases}$

Razonamiento

5 Según cada situación, plantea el sistema de ecuaciones correspondiente y verifica la solución.

a. Dos números tales que su suma sea 40 y su diferencia sea 14.

b. Dos números para los que su suma sea 12 y el doble del mayor más el menor sea 20.

c. Dos números que sumados den 10 y sumadas sus mitades den 4.

d. Dos números cuyo producto sea 56 y cuya diferencia sea 2.

e. Dos números primos que sumen 24 y para los cuales la suma de sus dobles sea 48.

6 Completa el dibujo que representa las condiciones planteadas para cada situación. Luego, escribe el sistema de ecuaciones correspondiente y soluciónalo.

a. El perímetro de un rectángulo es de 40 metros. Si se duplica el largo del rectángulo y se aumenta en 6 metros el ancho, el perímetro es de 76 metros. ¿Cuáles son las medidas originales del rectángulo? ¿Cuáles son las medidas del rectángulo agrandado?

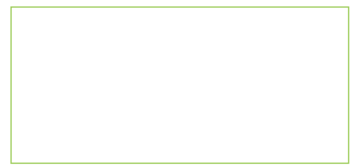


Figura 1

b. Un rectángulo tiene un perímetro de 392 metros. Si mide 52 metros más de largo que de ancho, ¿cuáles son sus dimensiones?



Figura 2

c. La altura de un trapecio isósceles es de 4 cm, la suma de las medidas de las bases es de 14 cm y los lados oblicuos miden 5 cm. Averigua las medidas de las bases del trapecio.



Figura 3

d. Uno de los ángulos agudos de un triángulo rectángulo mide 18° más que el otro. ¿Cuánto mide cada ángulo del triángulo?

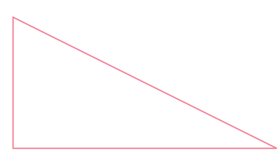


Figura 4

Resolución de problemas

7 Con dos camiones cuyas capacidades de carga son respectivamente de 3 y 4 toneladas, se hicieron en total 23 viajes para transportar 80 toneladas de madera. ¿Cuántos viajes realizó cada camión?

8 El costo de las entradas a una función de títeres es de $30 para los adultos y $20 para los niños. Si el sábado pasado asistieron 248 personas y se recaudaron $5 930, ¿cuántos adultos y cuántos niños asistieron a esa función?



9 Marta y sus amigos pagaron $109 por 5 libros y 7 cuadernos. Si la semana anterior compraron 8 libros y 11 cuadernos y la cuenta fue de $173, ¿cuánto cuesta cada libroy cuánto cuesta cada cuaderno?

10 Don Pedro y don Pablo fueron a comprar semillas. Don Pedro compró 4 sacos de maíz y 3 sacos de fréjol y don Pablo, 3 sacos de maíz y 2 de fréjol. La carga de don Pedro fue de 480 kilogramos y la de don Pablo de 340. ¿Cuánto pesaban cada saco de maíz y cada saco de fréjol?



11 En una fábrica hay máquinas de tipo *A* y máquinas de tipo *B*. La semana pasada se hizo mantenimiento a 5 máquinas de tipo *A* y a 4 del tipo *B* por un costo de $3 405. La semana anterior se pagaron $3 135 por hacer mantenimiento a 3 máquinas de tipo *A* y a 5 de tipo *B*. ¿Cuál es el costo de mantenimiento de las máquinas de cada tipo?

12 Por una chompa y unos zapatos se pagaron $126. Si el precio de la chompa aumentara en un 14%, entonces sería igual al 75% del precio de los zapatos. ¿Cuánto se pagó por cada artículo?

13 Si en un parqueadero hay 55 vehículos entre automóviles y motocicletas, y en total se cuentan 170 llantas, ¿cuántos automóviles y cuántas motocicletas hay estacionados en el parqueadero?

14 La edad de Patricia es el doble de la de su hermano Lucas. Hace 5 años, la suma de sus edades era igual a la edad actual de Patricia. ¿Cuál es la edad de cada uno?

15 Halla dos números tales que la suma de un cuarto del primero más un tercio del segundo sea igual a 3 y que si se multiplica el primero por 5 y el segundo por 7 se obtenga 62 como suma de los productos.

16 Un automóvil que avanza a 70 km/h lleva una ventaja de 90 km a otro que avanza por una vía paralela a 110 km/h. Calcula el tiempo que tarda el segundo automóvil en alcanzar al primero y la distancia recorrida para lograrlo.

17 En un estante hay 20 CD de música clásica y de música pop. De estos últimos hay seis discos más que de los de música clásica. ¿Cuántos discos de cada género musical hay en el estante?



18 La suma de 2 números es 14. Si se suma 1 al mayor, se obtiene el doble del menor. ¿Cuáles son los números?

7 Resolución de sistemas por la regla de Cramer

Explora

En una finca se envasan 300 L de leche al día. Para ello, se usan botellas de 2 L y botellas de 5 L y en total se usan 120 botellas.



- ¿Cuántas botellas de cada capacidad se usan?

Como se ha venido mostrando en la unidad, problemas como el planteado en el Explora pueden solucionarse con un sistema de ecuaciones. Para este caso se tiene que:

x: botellas de 2 L y: botellas de 5 L

La información se representa así:

$$\begin{cases} x + y = 120 \\ 2x + 5y = 300 \end{cases}$$

El método para solucionar este sistema se basa en el concepto de matriz.

Una **matriz** es la disposición de números reales que se asocia con un sistema de ecuaciones. Los números de dicha matriz son los coeficientes numéricos de las incógnitas. Se llama **matriz ampliada** a la disposición que, además de incluir los coeficientes numéricos, incluye las constantes del sistema.

7.1 Resolución de sistemas 2 × 2 por la regla de Cramer

Es posible asignar a una matriz un número real llamado determinante de la matriz. Para un sistema de ecuaciones 2 × 2, en el cual los coeficientes son a_1 y b_1 en la primera ecuación, a_2 y b_2 en la segunda ecuación y los términos independientes son d_1 y d_2 respectivamente, se tiene que:

Sistema	Matriz de coeficientes	Matriz de términos independientes
$\begin{cases} a_1x + b_1y = d_1 \\ a_2x + b_2y = d_2 \end{cases}$	$\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \end{pmatrix}$

El determinante de la matriz es el número que resulta de $a_1 \times b_2 - a_2 \times b_1$.

La **regla de Cramer** es una fórmula basada en los determinantes que pueden plantearse así:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} d_1 & b_1 \\ d_2 & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}} = \frac{d_1b_2 - d_2b_1}{a_1b_2 - a_2b_1} \qquad y = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & d_1 \\ a_2 & d_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}} = \frac{a_1d_2 - a_2d_1}{a_1b_2 - a_2b_1}$$

Ejemplo 1

En el ejemplo de la finca, la matriz de coeficiente es: $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$

Cada fila de la matriz corresponde a los coeficientes numéricos de cada una de las ecuaciones; para este caso, en la primera ecuación son 1 y 1, y en la segunda ecuación son 2 y 5.

La matriz de términos independientes es: $\begin{pmatrix} 120 \\ 300 \end{pmatrix}$

La solución del sistema será:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 120 & 1 \\ 300 & 5 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 5 \end{vmatrix}} = \frac{600 - 300}{5 - 2} = 100 \qquad y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 120 \\ 2 & 300 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 5 \end{vmatrix}} = \frac{300 - 240}{5 - 2} = 20$$

Luego, se usan 100 botellas de 2 litros y 20 botellas de 5 litros.

Razonamiento matemático

Punto de corte

Una recta tiene pendiente $\frac{3}{2}$ y pasa por el punto (3, 4). Otra recta con pendiente -1 pasa por el origen.

- ¿En qué punto se cortan estas rectas?

Destreza con criterios de desempeño: Resolver un sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas de manera algebraica, utilizando el método de determinantes (Cramer).

Ejemplo 2

El estacionamiento del colegio tiene una capacidad para 70 vehículos entre carros y bicicletas, si el total de ruedas es 200. ¿Cuántos carros y bicicletas existen si el parqueadero está lleno?

Sea x: el número de carros; y: el número de bicicletas.

La información se representa así: $\begin{cases} x + y = 70 \\ 4x + 2y = 200 \end{cases}$

Al aplicar la regla de Cramer, se obtiene:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 70 & 1 \\ 200 & 2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 2 \end{vmatrix}} = \frac{140 - 200}{2 - 4} = \frac{-60}{-2} = 30$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 70 \\ 4 & 200 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 2 \end{vmatrix}} = \frac{200 - 280}{2 - 4} = \frac{-80}{-2} = 40$$

De este modo se obtiene que existen 30 carros y 40 bicicletas.

Ten en cuenta

La regla de Cramer requiere precisión al hacer los cálculos, pues fácilmente puede llegarse a valores que no corresponden a la solución del sistema a partir de errores con signos o en adiciones y sustracciones.

TECNOLOGÍAS de la información y la comunicación TIC

www.e-sm.net/9smt06

Refuerza lo aprendido sobre la regla de Cramer.

Desarrolla tus destrezas

Ejercitación

1 Resuelve los siguientes sistemas de ecuaciones con el método de determinantes.

a. $\begin{cases} 2x - 3y = 12 \\ 3x - 3y = 15 \end{cases}$ b. $\begin{cases} x + y = 50 \\ x - y = 10 \end{cases}$

c. $\begin{cases} x + 2y = 100 \\ x - 2y = 60 \end{cases}$ d. $\begin{cases} 2x - y = 12 \\ 3x - y = 22 \end{cases}$

e. $\begin{cases} x + y = 20 \\ x - y = 10 \end{cases}$ f. $\begin{cases} x + y = 2 \\ x - y = 0 \end{cases}$

Comunicación

2 Inventa un sistema de ecuaciones cuyo determinante sea el dado y soluciónalo. Ten en cuenta que los valores para el término que no tiene incógnita no están dados y debes proponerlos.

$$\begin{pmatrix} 5 & 1 \\ -2 & 7 \end{pmatrix}$$

Resolución de problemas

PAI Proyecto de Activación de las Inteligencias

3 Plantea y resuelve, con determinantes, cada problema.

a. Tres cuartas partes de un tanque de combustible líquido están llenas. En cinco semanas se gastan las cantidades indicadas en la Tabla 1.

Semana	Gasto en litros
1.ª	150 L
2.ª	La sexta parte de lo que había en el tanque al comenzar la semana.
3.ª	250 L
4.ª	Un tercio de lo que había en el tanque al comenzar la semana.
5.ª	300 L

Tabla 1

Después de la 5.ª semana en el tanque aún quedan 200 litros. Calcula cuántos litros había en el tanque antes de comenzar el periodo descrito.

b. En un garaje hay 31 vehículos entre automóviles y motocicletas. Se cuentan 98 ruedas en total. ¿Cuántos automóviles y cuántas motocicletas hay?

c. Dos números suman 90. Si se divide el mayor entre el menor, el residuo es 6 y el cociente es 3, ¿cuáles son los dos números?

d. Dos números suman 46 y la diferencia de sus cuadrados es 92. ¿Cuáles son los dos números?

e. Una caja de metal contiene objetos triangulares y rectangulares. En total hay 20 objetos y pueden contarse 68 vértices en total. ¿Cuántos objetos hay de cada clase?

8 Resolución de sistemas lineales por el método de Gauss

Explora

¿Qué método se puede utilizar para resolver este sistema de ecuaciones lineales?

$$\begin{cases} 3y + 4z = 1 \\ \quad 2z = -4 \end{cases}$$



tomado de http://www.thedomesticadministrator.com

8.1 Sistemas escalonados

Los sistemas lineales que tienen esta forma, reciben el nombre de sistemas escalonados y su resolución es muy sencilla, de manera que no es necesario utilizar los métodos conocidos.

Para resolver el sistema planteado se procede de la siguiente manera:

En la segunda ecuación: $z = -\frac{4}{2} = -2$

En la primera ecuación: $3y + 4 \cdot (-2) = 1 \rightarrow 3y = 9 \rightarrow y = \frac{9}{3} = 3$

Solución: $y = 3$; $z = -2$

Un sistema de ecuaciones es escalonado cuando en una de las ecuaciones solo existe una incógnita y en las otras ecuaciones, las otras incógnitas van apareciendo progresivamente.

Ten en cuenta

Al resolver un sistema de ecuaciones, se obtienen los valores de las incógnitas y antes de escribir la respuesta o conjunto solución, es necesario hacer la comprobación, reemplazando estos valores en las ecuaciones originales.

Ejemplo 1

Resuelve el sistema: $\begin{cases} -28x \qquad = -84 \\ -4x - 8y = -4 \end{cases}$

Solución:

Este sistema es escalonado.

En la primera ecuación: $x = \frac{-84}{-28} = 3$

En la segunda ecuación: $-8y - 4 \cdot (3) = -4 \rightarrow -8y = 8 \rightarrow y = -1$

De donde se obtiene que: $x = 3$; $y = -1$.

8.2 Método de Gauss

El método de reducción se puede generalizar con el método de Gauss, que consiste en transformar un sistema de ecuaciones en un sistema escalonado.

Ejemplo 2

Resuelve el sistema: $\begin{cases} 3x + 2y = 2 & \text{(1.ª ecuación)} \\ x - y = -6 & \text{(2.ª ecuación)} \end{cases}$

Solución:

Se mantiene la primera ecuación	(1.ª) → (1.ª)	$3x + 2y = 2$
Se elimina *x* de la segunda ecuación	(1.ª) − 3 · (2.ª) → (2.ª)	$5y = 20$

Como se ha obtenido un sistema escalonado, en la segunda ecuación se tiene que $y = 4$, y al reemplazar este valor en la primera ecuación, nos da como resultado $x = -2$.

Por lo tanto, el conjunto solución de este sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas es: $x = -2$; $y = 4$.

Destreza con criterios de desempeño: Resolver un sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas de manera algebraica, utilizando el método de eliminación gaussiana.

Ejemplo 3

Resuelve el sistema: $\begin{cases} -x + 2y = -3 & (1.^a \text{ ecuación}) \\ 2x - 3y = -9 & (2.^a \text{ ecuación}) \end{cases}$

Solución:

Se mantiene la primera ecuación $(1.^a) \rightarrow (1.^a)$

Se elimina *x* de la segunda ecuación $2(1.^a) + (2.^a) \rightarrow (2.^a)$

$$\begin{cases} -x + 2y = -3 \\ y = -15 \end{cases}$$

El valor de *y* se reemplaza en la $(1.^a)$: $-x + 2(-15) = -3$, por lo que $x = -27$

Por lo tanto, el conjunto solución de este sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas es: $x = -27$; $y = -15$

Actividad resuelta

Ejercitación

1 Observa la solución del sistema:

$$\begin{cases} 2x - 4y = 2 \\ -x - 3y = 4 \end{cases}$$

Solución:

$(1.^a) \rightarrow (1.^a)$

$(1.^a) + 2(2.^a) \rightarrow (2.^a)$

$$\begin{cases} 2x - 4y = 2 \\ -10y = 10 \end{cases} \quad y = -1$$

El valor de y se reemplaza en la $(1.^a)$: $2x - 4(-1) = 2$; $x = -1$

El conjunto solución de este sistema es: $x = -1$; $y = -1$

App

Sistemas de ecuaciones

Abre la aplicación *Sistemas de ecuaciones lineales* y utilízala para verificar la solución a un sistema de ecuaciones 2 x 2 y 3 x 3 realizada por ti.



Desarrolla tus destrezas

Ejercitación

2 Resuelve los siguientes sistemas escalonados:

a. $\begin{cases} 3x + 4y = 0 \\ 2y = -6 \end{cases}$

b. $\begin{cases} y = 4 \\ y - z = 7 \end{cases}$

c. $\begin{cases} 4x + 3y = 10 \\ -y = 10 \end{cases}$

d. $\begin{cases} x - y = -7 \\ 2y = 8 \end{cases}$

3 Aplica el método de Gauss para resolver los siguientes sistemas:

a. $\begin{cases} x - y = 7 \\ 2x + y = 2 \end{cases}$

b. $\begin{cases} 3x + 4y - 1 = 0 \\ 5x + 2y + 3 = 0 \end{cases}$

Modelación

4 Plantea un problema cuya representación algebraica sea el sistema de ecuaciones dado y resuélvelo por el método de Gauss.

$$\begin{cases} x - y = 7 \\ 2x + y = 2 \end{cases}$$

Practica Más

Sistemas de ecuaciones

Comunicación

1. Determina los sistemas de ecuaciones en cada situación.

a. A un teatro asisten 82 personas entre niños y adultos. El costo de la entrada de los adultos es $12 y la de los niños, $6 La taquilla recolecta $762.

b. En una granja hay 92 animales entre gallinas y vacas. En total hay 248 patas.

c. En una pastelería venden 65 unidades de cupcakes de fresa y de chocolate por $ 813. Los de chocolate cuestan $12 y los de fresa, $13.

2. Verifica que los siguientes valores son la solución de los sistemas de ecuaciones.

a. $x = 5$ y $y = -2$

$$\begin{cases} x + y = 3 \\ -3x + 6y = -27 \end{cases}$$

b. $x = 3$ y $y = 7$

$$\begin{cases} 2x + y = 13 \\ -x + 6y = 45 \end{cases}$$

c. $x = -5$ y $y = -4$

$$\begin{cases} 4x + 3y = -32 \\ -x - 2y = 13 \end{cases}$$

d. $x = 7$ y $y = 1$

$$\begin{cases} 2x + 9y = 23 \\ y - x = -6 \end{cases}$$

Resolución gráfica de sistemas

Comunicación

3. Halla la solución a los sistemas de ecuaciones mediante gráficas.

a. $\begin{cases} 2x - y = 4 \\ 2x - 3y = 9 \end{cases}$

b. $\begin{cases} 5x + 6y = 9 \\ x + y = 5 \end{cases}$

4. Halla el sistema de ecuaciones asociado a la gráfica cuya solución sean lan coordenadas del punto *B*.

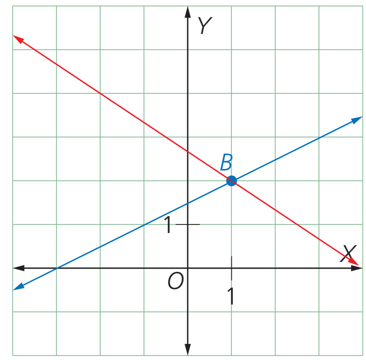


Figura 1

Resolución de sistemas de ecuaciones

Ejercitación

5. Halla la solución a los sistemas de ecuaciones.

a. $\begin{cases} 2x - 3y = 15 \\ 8x - 4y = -1 \end{cases}$

b. $\begin{cases} x + y = 13 \\ 2x + 2y = 26 \end{cases}$

c. $\begin{cases} -5x - 7y = -5 \\ 2x + y = -45 \end{cases}$

d. $\begin{cases} -x - y = 9 \\ x + 2y = -19 \end{cases}$

e. $\begin{cases} 4x - 8y = -14 \\ 2x - 4y = -7 \end{cases}$

f. $\begin{cases} x - y = 13 \\ x + y = 17 \end{cases}$

g. $\begin{cases} x = -2 \\ 2x - 3y = -45 \end{cases}$

h. $\begin{cases} x + y = 0 \\ -x + 8y = 7 \end{cases}$

Resolución de problemas

6. Determina los sistemas de ecuaciones para cada situación y halla su solución.

a. A un concierto asisten 150 personas entre hombres y mujeres. Los hombres pagan $56 y las mujeres la mitad. La taquilla recolecta $5 880. ¿Cuántos hombres y cuántas mujeres asistieron al concierto?

b. Al comprar camisetas y pantalonetas se pagaron $ 312. Cada camiseta cuesta $ 10 y cada pantaloneta cuesta $ 8, si en total se compraron 34 prendas, ¿cuántas camisetas y pantalonetas se compraron?

Estrategia: Combinar operaciones

Problema

Hace 5 años, la edad de Camila era la tercera parte de la de su abuela y dentro de 13 años la edad de la abuela será el doble de la de Camila. ¿Cuáles son las edades actuales de Camila y de su abuela?

1. Comprende el problema

- ¿Cuáles son los datos que proporciona el problema?
  R: La relación de hace 5 años entre la edad de Camila y la de su abuela, y cómo será esta relación dentro de 13 años.
- ¿Qué debes averiguar?
  R: Las edades actuales de Camila y de su abuela.

2. Crea un plan

- Simboliza la edad de Camila y la de su abuela; encuentra la relación que se establece entre ellas en el tiempo; forma un sistema de dos ecuaciones simultáneas, y resuélvelo.

3. Ejecuta el plan

- Simboliza con x la edad actual de Camila y con y la edad actual de su abuela. En una tabla muestra la relación entre dichas edades.

	Edad actual	Hace 5 años	Dentro de 13 años
Camila	x	$x-5$	$x+13$
Abuela	y	$y-5$	$y+13$

Tabla 1

- Expresa la relación entre las edades hace 5 años.

$$x-5=\frac{1}{3}(y-5) \qquad (1)$$

- Expresa la relación entre las edades dentro de 13 años.

$$x+13=\frac{1}{2}(y+13) \qquad (2)$$

- Multiplica la ecuación (1) por 3 y la ecuación (2) por 2 y forma el sistema.

$$\begin{cases}3x-15=y-5\\2x+26=y+13\end{cases} \rightarrow \begin{cases}3x-y=10\\2x-y=-13\end{cases}$$

Al resolver este sistema se tiene que $x=23$.

R: La edad actual de Camila es 23 años.

4. Comprueba la respuesta

- Verifica que la edad actual de la abuela es 59 años.

Aplica la estrategia

1. La edad de un padre es el triple de la de su hijo y hace 15 años era el doble de la edad actual. ¿Cuántos años tiene cada uno actualmente?
   a. Comprende el problema
   ....
   ....
   b. Crea un plan
   ....
   ....
   c. Ejecuta el plan
   ....
   ....
   d. Comprueba la respuesta
   ....
   ....

Resuelve otros problemas

2. La suma de dos números es 40 mientras que $\frac{1}{5}$ de su diferencia es dos. ¿Cuáles son los dos números?
3. Para ingresar a un parque de diversiones, una familia de 3 niños y 2 adultos paga $100 por las entradas; y otra, conformada por 2 niños y 3 adultos, paga $105 ¿Cuánto cuesta la entrada de los niños y cuánto la de los adultos?
4. Observa el siguiente sistema de ecuaciones.

$$\begin{cases}3x+2y=6\\3x+2=-2y\end{cases}$$

Resuélvelo con el método gráfico y determina cuál es su solución.

Formula problemas

5. Inventa un problema en el que se incluya la información de la gráfica y resuélvelo.

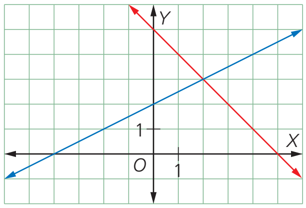


Figura 1

9 Sistemas de inecuaciones de primer grado

Explora

Si al doble de la edad de Camilo se le restan 17 años, resulta ser menos de 35; pero si a la mitad de la edad de Camilo se le suman 3 años, el resultado es mayor que 15.


SM Ediciones

- ¿Cuántos años tiene Camilo?

En algunas expresiones cotidianas es necesario conocer valores que no necesariamente son iguales a algo. Por ejemplo, cuando vas de compras y debes conseguir un pantalón que valga menos de $40 o cuando se dice "el peso de un objeto está entre 105 y 107 libras", este estilo de expresiones pueden escribirse con inecuaciones.

Una **inecuación** es una expresión en la cual hay elementos desconocidos que están relacionados con los signos $<$ o $>$; los signos $<$ o $>$ pueden cambiar y ser $\geqslant$ o $\leqslant$.

Para **resolver una inecuación** se tienen en cuenta las siguientes propiedades:

- Si $a < b$ y c es un número real, entonces, $a \pm c < b \pm c$.
- Si $a < b$ y $c > 0$, entonces $ac < bc$ y $\frac{a}{c} < \frac{b}{c}$.
- Si $a < b$ y $c < 0$, entonces $ac > bc$ y $\frac{a}{c} > \frac{b}{c}$.

De forma similar se verifican las propiedades cuando $a > b$.

- Si $a > b$ y c es un número real, entonces, $a \pm c > b \pm c$.
- Si $a > b$ y $c > 0$, entonces $ac > bc$ y $\frac{a}{c} > \frac{b}{c}$.
- Si $a > b$ y $c < 0$, entonces $ac < bc$ y $\frac{a}{c} < \frac{b}{c}$.

Ejemplo 1

Para averiguar la edad de Camilo puede hacerse el siguiente razonamiento:

Sea x la edad de Camilo. Sea $2x$ el doble de la edad de Camilo.

De esta manera, la expresión "al doble de la edad de Camilo se le restan 17 años, resulta ser menos de 35" puede representarse así:

$$2x - 17 < 35 \Rightarrow 2x < 35 + 17 \Rightarrow 2x < 52 \Rightarrow x < 26$$

Además, la expresión "si a la mitad de la edad de Camilo se le suman 3 años, el resultado es mayor que 15" puede representarse así:

$$\frac{x}{2} + 3 > 15 \Rightarrow \frac{x}{2} > 15 - 3 \Rightarrow \frac{x}{2} > 12 \Rightarrow x > 12 \times 2 \Rightarrow x > 24$$

Si la edad de Camilo es mayor que 24 y menor que 26, entonces puede deducirse que Camilo tiene 25 años.

9.1 Inecuaciones de primer grado con una incógnita

Expresiones como:

$$ax + b < c \qquad ax + b > c \qquad ax - b < c \qquad ax - b > c$$

son **inecuaciones de primer grado con una incógnita** y para resolverlas se unen las propiedades mencionadas al inicio. El problema de determinar la edad de Camilo se solucionó a partir del planteamiento y la solución de dos inecuaciones de este estilo.

Es importante tener cuidado al aplicar las propiedades, sobre todo cuando se multiplica o se divide entre un número negativo.

Ejemplo 2

En la solución de la inecuación $-4x - 12 > 8$, se tiene que:

$$-4x - 12 > 8 \Rightarrow -4x > 8 + 12$$
$$\Rightarrow -4x > 20 \Rightarrow x < -5.$$

El signo de la inecuación pasó de ser $>$ a ser $<$, pues se dividió entre -4.

Ten en cuenta

Las inecuaciones de primer grado se resuelven igual que las ecuaciones de primer grado, la solución va a cambiar dependiendo de la notación que tenga la desigualdad.

Destrezas con criterios de desempeño:
- Representar un intervalo en R de manera algebraica y gráfica y reconocer al intervalo como la solución de una inecuación de primer grado con una incógnita en R.
- Resolver de manera geométrica una inecuación lineal con dos incógnitas en el plano cartesiano sombreando la solución.

Cabe anotar que la solución de una inecuación es un conjunto que puede representarse en una recta real. Dicho conjunto recibe el nombre de **intervalo**.

Ejemplo 3

La representación gráfica de la solución de la inecuación $-4x - 5 > 15$, en donde $-4x > 20$; multiplicamos por -1 a cada miembro de la inecuación, por lo que la desigualdad cambia de sentido, de donde se obtiene que $x < -5$, y se muestra en la Figura 1.

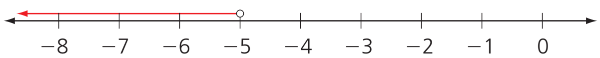


Figura 1

La semirecta de color rojo representa todos los números menores que -5 y tiene una flecha que indica que son muchos más de los que pueden verse. De hecho, aquí se incluye el concepto de "infinito" que se aclarará en cursos superiores.

9.2 Inecuaciones de primer grado con dos incógnitas

Una **inecuación de primer grado con dos incógnitas** es una expresión algebraica que puede expresarse de alguna de las siguientes formas:

$$ax + by < c \qquad ax + by > c \qquad ax + by \leqslant c \qquad ax + by \geqslant c$$

Es importante tener en cuenta que estas expresiones son similares a las que se describen en una línea recta y que, de hecho, tienen una estrecha relación con ellas, la cual se explica a continuación.

En esta Unidad , se dedujo que $y = mx + b$ describe una línea recta y en el método gráfico, se pudo observar que expresiones de la forma:

$$ax + by = c$$

pueden llevarse a la forma:

$$y = mx + b.$$

De manera similar, expresiones de la forma $ax + by < c$ (o cualquiera de las planteadas como inecuación de primer grado con dos incógnitas) pueden llevarse a una forma en la cual la recta $ax + by = c$ define dos semiplanos, uno que describe la región $ax + by < c$ y otro que describe la región $ax + by > c$.

Ejemplo 4

Observa el proceso para representar gráficamente la inecuación $-9x + 3y < -6$.

1. Se escribe la inecuación de tal manera que la y quede despejada:

$$3y < 9x - 6 \text{ de donde } y < 3x - 2$$

2. Se grafica la recta $y = 3x - 2$.
3. Se determina, a partir de la recta, la región para la cual los valores de y son menores que los valores de $3x - 2$.
4. Se colorea dicha región. La gráfica muestra la solución de la inecuación $y < 3x - 2$ y la recta de color azul es $y = 3x - 2$.

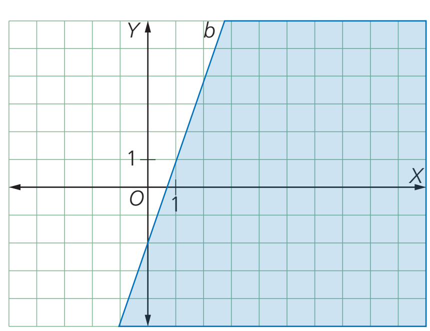


Figura 2

Ten en cuenta

El conjunto solución de una inecuación con dos incógnitas es un semiplano que se representa en un plano cartesiano.

9.3 Sistemas de inecuaciones de primer grado con dos incógnitas

Este tipo de sistemas son de la forma $\begin{cases} a_1x + b_1y < c_1 \\ a_2x + b_2y < c_2 \end{cases}$.

El signo $<$ puede cambiar y ser $>$, $\geq$ o $\leq$.

Si se tiene en cuenta lo aprendido en los temas 9.1 y 9.2, puede concluirse que la solución de un sistema de inecuaciones será una región del plano cartesiano en la cual se verifiquen, simultáneamente, cada una de las inecuaciones de dicho sistema.

Ten en cuenta

Al conjunto solución de un sistema de inecuaciones se le denomina "Región factible".

Actividad resuelta

Modelación

1 Resuelve el sistema $\begin{cases} 2x + y > 4 \\ x - 2y < 8 \end{cases}$.

Solución:

Para la inecuación $2x + y > 4$ se tiene que $y > -2x + 4$, así que se grafica la recta $y = -2x + 4$ (color azul en la Figura 3).

Para la inecuación $x - 2y < 8$ se tiene que $y > \frac{x}{2} - 4$, así que se grafica la recta $y = \frac{x}{2} - 4$ (color rojo en la Figura 3).

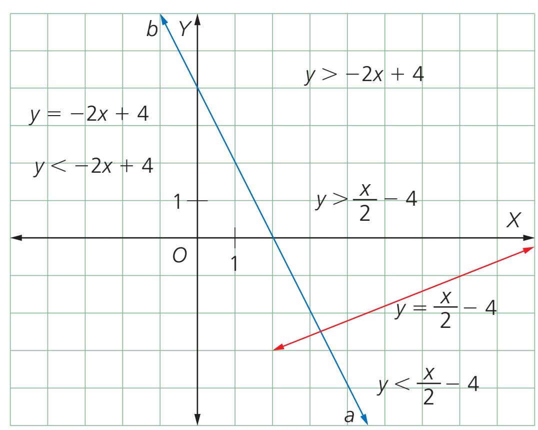


Figura 3

Como puede verse en el plano de la Figura 4, se generan cuatro regiones que están delimitadas, precisamente, por las rectas. Así, la solución del sistema será la región para la cual $y > -2x + 4$ y $y > \frac{x}{2} - 4$, simultáneamente.

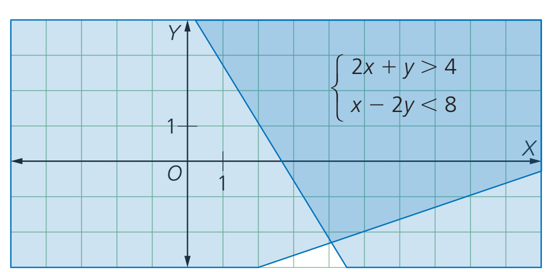


Figura 4

Destrezas con criterios de desempeño:
- Resolver de manera geométrica una inecuación lineal con dos incógnitas en el plano cartesiano sombreando la solución.
- Resolver un sistema de inecuaciones lineales con dos incógnitas de manera gráfica (en el plano) y reconocer la zona común sombreada como solución del sistema.

Desarrolla tus destrezas

Ejercitación

2 Resuelve las siguientes inecuaciones y representa la solución gráficamente:

a. $-2x - 3 > 5$

b. $-5x + 4 < 3$

c. $6x - (4 + 3x) < 2x + 4$

d. $\dfrac{-6x + 7}{-3} > \dfrac{8x - 4}{2}$

e. $2 - \left[-2(x + 1) - \dfrac{x - 3}{2}\right] < \dfrac{2x}{3} - \dfrac{5x - 3}{12} + 3$

Razonamiento

3 Relaciona la inecuación con la gráfica correspondiente a su solución.

a. $3x - 2y > 1$

b. $-x + y < -4$

c. $3x - 4y < -2$

d. $x + 3y > 2$

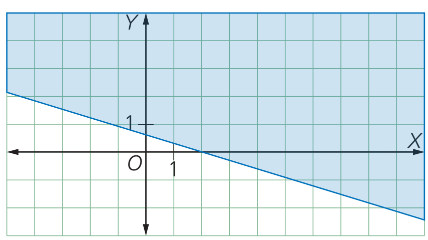


Figura 5

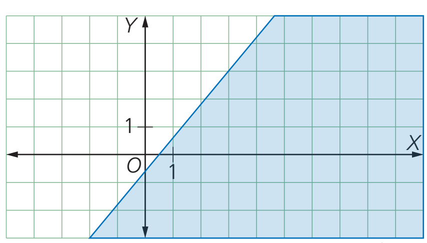


Figura 6

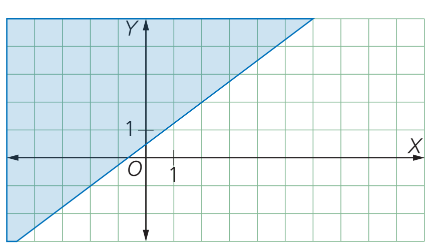


Figura 7

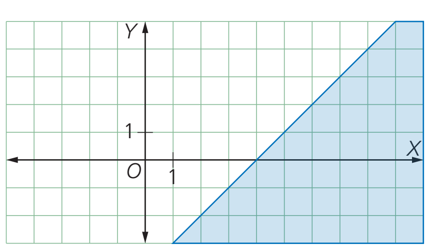


Figura 8

4 La solución de la siguiente inecuación es incorrecta. Explica por qué y escribe frente a cada paso del proceso lo que se hizo y cuál fue el error.

$\dfrac{3}{x} < 2$

$3 < 2x$

$\dfrac{3}{x} < x$

Ejercitación

5 Resuelve los siguientes sistemas de inecuaciones.

a. $\begin{cases} x - y < 2 \\ 2x > 6 \end{cases}$

b. $\begin{cases} 2(x - 1) - y < 2 \\ y > 0 \end{cases}$

c. $\begin{cases} x - y < 2 \\ x + y > 2 \end{cases}$

d. $\begin{cases} 3x - 5y > 1 \\ 5x - 3y < 1 \end{cases}$

Modelación

6 Define un sistema de inecuaciones cuya solución, sea la región resaltada en la siguiente gráfica.

Escribe los pasos que seguiste para determinar dicho sistema y explica si es el único que puede cumplir las condiciones pedidas.

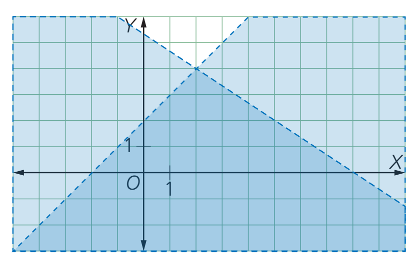


Figura 9

Resolución de problemas

7 Plantea para cada caso una inecuación con la que se describa la situación. Luego, resuélvela y verifica la respuesta.

a. Una furgoneta pesa 875 kg. La diferencia entre su peso cuando está vacía y el peso de la carga que lleve no debe ser inferior a 415 kg. Si deben cargarse 4 cajones iguales, ¿cuánto puede pesar, como máximo, cada uno de ellos para poder ser transportado en la furgoneta?

b. ¿Cuáles son los números cuyo triple excede a su duplo en más de 20?

c. Si el lado de un cuadrado es mayor o igual que 7, ¿cuál es su perímetro?

Prueba Ser Estudiante

A continuación se presentan ejercicios con cuatro alternativas de solución, de las cuales, una sola es la correcta. Señala en la tabla de respuestas, el literal que consideres correcto.

1. Si en el sistema $\begin{cases} 3m - 2n = -2 \\ 5m + 8n = -60 \end{cases}$, se aplica el método de Cramer se obtiene:

A. $m = 3; n = 4$

B. $m = -4; n = -5$

C. $m = -1; n = 2$

D. $m = 12; n = 14$

2. Si en el sistema $\begin{cases} \frac{x}{3} + \frac{y}{4} = 6 \\ 3x - 4y = 4 \end{cases}$, se aplica el método de igualación, se obtiene:

A. $x = 10; y = 6$

B. $x = 8; y = 12$

C. $x = 12; y = 8$

D. $x = 6; y = 10$

3. Si en el sistema $\begin{cases} 5x + 3y = 3 \\ 4x + 4y = 4 \end{cases}$, se aplica el método de Gauss, se obtiene el siguiente sistema escalonado:

A. $\begin{cases} 5x + 3y = 3 \\ \quad - 8y = 8 \end{cases}$

B. $\begin{cases} 5x + 3y = 3 \\ \quad - 8y = -8 \end{cases}$

C. $\begin{cases} 5x + 3y = 3 \\ \quad 8y = -4 \end{cases}$

D. $\begin{cases} 5x + 3y = 3 \\ \quad 8y = 4 \end{cases}$

4. Aplicando el método de sustitución, calcula cuántos carritos y cuántas motos tiene Andrés si se sabe que tiene 80 vehículos de colección entre carritos y motos. Además, el número de carros supera en dos al número de motos.

A. Tiene 41 carritos y 39 motos

B. Tiene 45 carritos y 43 motos

C. Tiene 39 carritos y 37 motos

D. Tiene 37 carritos y 35 motos

5. Si en el sistema $\begin{cases} x + y = 7 \\ 2x - y = 2 \end{cases}$, se aplica la regla de Cramer, se obtiene el siguiente resultado:

A. $x = 6; y = 1$

B. $x = 1; y = 6$

C. $x = 3; y = 4$

D. $x = 4; y = 3$

6. La suma de dos números es 150 y su diferencia es el cuádruple del menor. ¿Cuáles son los dos números?

A. -75 y 225

B. 75 y 225

C. -50 y 200

D. 50 y 200

7. Un autobús sale del terminal de transportes a una velocidad de 60 km/h. Media hora más tarde, sale otro más rápido en la misma dirección a 80 km/h. ¿Cuánto tardará el segundo bus en alcanzar al primero?

A. Lo alcanza en 2 horas y 10 minutos

B. Lo alcanza en 1 hora y 30 minutos

C. Lo alcanza en 2 horas y 20 minutos

D. Lo alcanza en 1 hora y 40 minutos

Indicadores de logro:
- Resuelve sistemas de ecuaciones e inecuaciones lineales con dos incógnitas de manera gráfica y/o algebraica.

8. La suma de dos números es 50 mientras que $\frac{1}{4}$ de su diferencia es cinco. ¿Cuáles son los dos números?

A. 35 y 15 **B.** 45 y 5

C. 33 y 17 **D.** 40 y 10

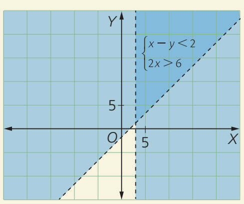
9. ¿Cuál es el menor número entero múltiplo de 4, que satisface la siguiente inecuación: $x + 2 < 3x + 1$?

A. 8 **B.** 4

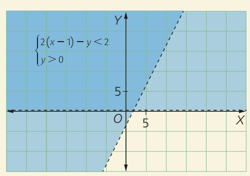
C. 16 **D.** 12

10. La solución gráfica de la inecuación es: $\begin{cases} x - y < 2 \\ 2x > 6 \end{cases}$

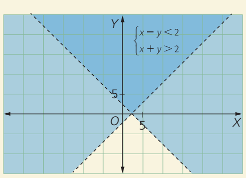
A.



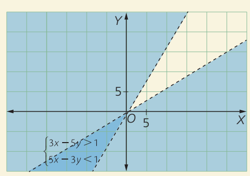
B.



C.



D.



11. Si en el sistema $\begin{cases} 7m + 3n = 15 \\ 5m + 6n = 27 \end{cases}$, se aplica el método de igualación, se obtiene:

A. $m = 7; n = 3$

B. $m = 3; n = 7$

C. $m = 3; n = 2$

D. $m = 2; n = 3$

12. La diferencia entre dos números es 5; y si se suman, el total es 29. ¿Cuáles son los dos números?

A. 17 y 12 **B.** 19 y 14

C. 10 y 19 **D.** 13 y 16

13. Si en el sistema $\begin{cases} 3m + 2n = -22 \\ 5m + 8n = -60 \end{cases}$, se aplica el método de Cramer, se obtiene:

A. $m = 3; n = 4$ **B.** $m = -4; n = -5$

C. $m = -1; n = 2$ **D.** $m = -12; n = 14$

14. Si en el sistema $\begin{cases} 2x + 3y = 13 \\ 4x - 4y = -4 \end{cases}$, se aplica el método de Gauss, se obtiene el siguiente sistema escalonado:

A. $\begin{cases} 2x + 3y = 13 \\ y = 3 \end{cases}$

B. $\begin{cases} 2x + 3y = 13 \\ y = -3 \end{cases}$

C. $\begin{cases} 2x + 3y = 13 \\ -4y = -4 \end{cases}$

D. $\begin{cases} 2x + 3y = 13 \\ 4y = -4 \end{cases}$

15. Un rectángulo tiene un perímetro de 196 metros. Si mide 26 metros más de largo que de ancho, ¿cuáles son sus dimensiones?

A. 62 metros de largo y 36 metros de ancho

B. 20 metros de largo y 46 metros de ancho

C. 46 metros de largo y 72 metros de ancho

D. 64 metros de largo y 64 metros de ancho

16. La solución de la inecuación $-4x - 12 > 8$ es:

A. $x < -5$ **B.** $x < -4$

C. $x > -5$ **D.** $x > -4$

Tabla de respuestas

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A
B	B	B	B	B	B	B	B	B	B	B	B	B	B	B	B
C	C	C	C	C	C	C	C	C	C	C	C	C	C	C	C
D	D	D	D	D	D	D	D	D	D	D	D	D	D	D	D

Economía solidaria


SM Ediciones

El concepto de **economía solidaria** apareció por primera vez en estudios económicos que se remontan al siglo XIX. En ese momento se denominó "economía social" a las innovadoras organizaciones que se iban creando como respuesta a los nuevos problemas sociales que la sociedad capitalista generaba y se planteó que la justicia social debería ser un objetivo de la actividad económica.

La economía solidaria aporta una mirada, unos valores y unas prácticas al servicio de dicha transformación, configurando un movimiento social a nivel mundial y con características propias que se suma al conjunto de organizaciones ciudadanas que, tanto local como globalmente, participan en la construcción de una sociedad y un mundo más equitativo y sostenible.

1

Las cooperativas

Se define como cooperativa a una empresa asociativa sin ánimo de lucro, en la cual los trabajadores o los usuarios, según sea el caso, son simultáneamente los aportantes y los gestores de la empresa.

El objeto de esta empresa es producir o distribuir conjunta y eficientemente bienes o servicios para satisfacer las necesidades de sus asociados y de la comunidad en general.

2

Los fondos de empleados

Son asociaciones de derecho común, sin ánimo de lucro, constituidas por personas libres, trabajadores dependientes y subordinados de la misma empresa, que ofrecen servicios de crédito a costos mínimos. Se constituyen básicamente con trabajadores asalariados, para los cuales su asociación y retiro es voluntario.

3

Las asociaciones mutuales

Son organizaciones privadas sin ánimo de lucro que están constituidas para fomentar la ayuda recíproca entre sus miembros, satisfaciendo sus necesidades mediante la prestación de servicios que contribuyan al mejoramiento de su calidad de vida.

Desarrolla tus destrezas

Planeación económica y financiera

1. Pregunta a algún familiar si pertenece o ha pertenecido a alguna cooperativa o fondo de empleados. Pídele que te cuente qué beneficios recibió de este tipo de economía y qué ventajas y desventajas ve en ella. Escribe tres párrafos en donde cuentes los resultados de tu indagación.

2. Lee el siguiente texto y comparte con tus compañeros tu opinión sobre él.

> [...] El cooperativismo, como movimiento social y económico, se convierte por su forma de organización y principios en una importante alternativa: pone como valor fundamental a las personas y la mejora de su calidad de vida antes que a la especulación, la acumulación de capital y la competencia, teniendo como cimiento el trabajo solidario y la ayuda mutua dentro y fuera de la cooperativa, y la propiedad común entre los socios cooperativistas de los medios de producción. Su objetivo es lograr un desarrollo económico en plano de igualdad entre los que forman parte del proceso productivo, y una distribución equitativa de la riqueza [...]
>
> Behoteguy Chávez, René. (consultado en Octubre 2016). El cooperativismo y la Economía Solidaria (como alternativa). Recuperado de: http://webcache.googleusercontent.com/search?q=cache:1izxmqwVmjQJ:aise.surestegc.org/documentos/cooperativismo.doc+&cd=1&hl=en&ct=clnk&gl=ec

¿Es posible otra economía?, ¿alternativa y solidaria?

La economía solidaria parte de un modo alternativo de ver las prioridades en las que actualmente se fundamenta la economía.

Se trata de una visión y una práctica que reivindica la economía como medio y no como fin, que se pone al servicio del desarrollo personal y comunitario, que se convierte en un instrumento que contribuye a mejorar la calidad de vida de las personas y de su entorno social.

Principios de las asociaciones de economía solidaria

1. **Igualdad.** Promover la igualdad en las relaciones y satisfacer de manera equilibrada los intereses de sus integrantes.

2. **Empleo.** Crear empleo estable, favoreciendo especialmente el acceso de personas en situación o riesgo de exclusión social, asegurando a cada persona condiciones de trabajo y una remuneración digna, estimulando su desarrollo personal y la asunción de responsabilidades.



3. **Medio ambiente.** Favorecer acciones, productos y métodos de producción respetuosos con el medio ambiente.

4. **Cooperación.** Favorecer la cooperación en lugar de la competencia dentro y fuera de la organización.

5. **Sin carácter lucrativo.**

6. **Compromiso con el entorno.** Las iniciativas solidarias estarán comprometidas con el entorno social en el que se desarrollan.

¿Se puede producir, distribuir, consumir y acumular solidariamente?

Al incorporar la solidaridad en la economía aparece un nuevo modo de hacerla, una nueva racionalidad económica.

Pero como la economía tiene tantos aspectos y dimensiones y está constituida por tantos sujetos, procesos y actividades, y como la solidaridad tiene tantas maneras de manifestarse, la economía solidaria no es un modo definido y único de organizar actividades y unidades económicas. Por el contrario, muchas y muy variadas son las formas y modos de la economía solidaria. Poner más solidaridad en las empresas, en el mercado, en el sector público, en las políticas económicas, en el consumo, en el gasto social y personal, etc.

Pregunta tipo Saber

Lucía va a comprar una casa. Para ello solicitó un préstamo en su cooperativa de $ 40 000. Va a diferir este préstamo a 120 cuotas y el interés será del 10% anual.



SM Ediciones

Con relación a este crédito se puede afirmar que:

A. La máxima cuota que pagará será aproximadamente de $ 300.

B. La máxima cuota que pagará será aproximadamente de $ 350.

C. La máxima cuota que pagará será aproximadamente de $ 400.

D. La máxima cuota que pagará será aproximadamente de $ 450.

Trabajo en grupo

Administración de recursos

3. Expliquen el siguiente cuadro.

4. Investiguen algunos otros aspectos sobre las funciones de entidades que se dedican a promover la Economía Solidaria.

	Economía convencional	Economía Solidaria
Fin	Maximizar el beneficio	La calidad de vida de las personas
Medios	Recursos humanos	Rentabilidad económica

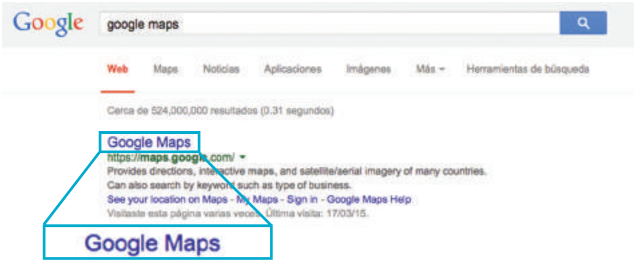
Utiliza Google Maps

Evaluar información confiable sobre la ubicación y forma de llegar a un sitio de interés puede ser más interesante con Google Maps. Este servidor presenta mapas por capas: una capa con la nomenclatura de calles, carreras y avenidas y otra capa con fotografías que permiten visualizar un lugar específico en 360°. Además, este servidor te sugiere varias rutas para ir de un sitio a otro. En esta actividad aprenderás a buscar un sitio específico, trazar una ruta y compartirla con otros, con ayuda de Google Maps.

1 Ingresa a Google Maps

a. Abre tu navegador preferido (Chrome, Firefox, Safari, entre otros).

b. Busca "Google Maps" y selecciona la primera página de la lista.



2 Reconoce el entorno de Google Maps

a. Buscador de Google Maps.

b. Zoom.

c. Galería fotográfica de los sitios de interés sugeridos en la zona observada.

d. Capas: mapa y satélite.

e. Zona de mapa

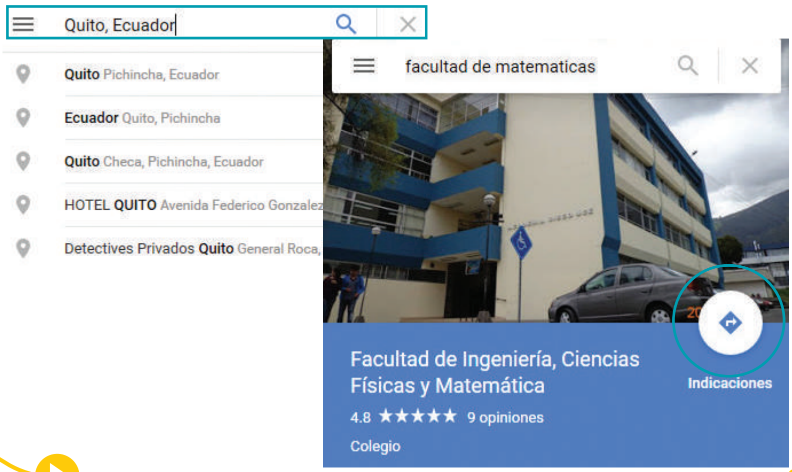


3 Encuentra una ruta

a. Consulta sobre una universidad con facultad de matemáticas en tu ciudad.

b. En el buscador de Google Maps escribe el nombre de tu ciudad seguido de Ecuador. Luego, ingresa el nombre o la dirección de la universidad escogida y haz clic en *Cómo llegar*.

c. En el punto de partida escribe el nombre o dirección de tu colegio y observa la(s) ruta(s) para llegar a dicha universidad desde tu colegio.



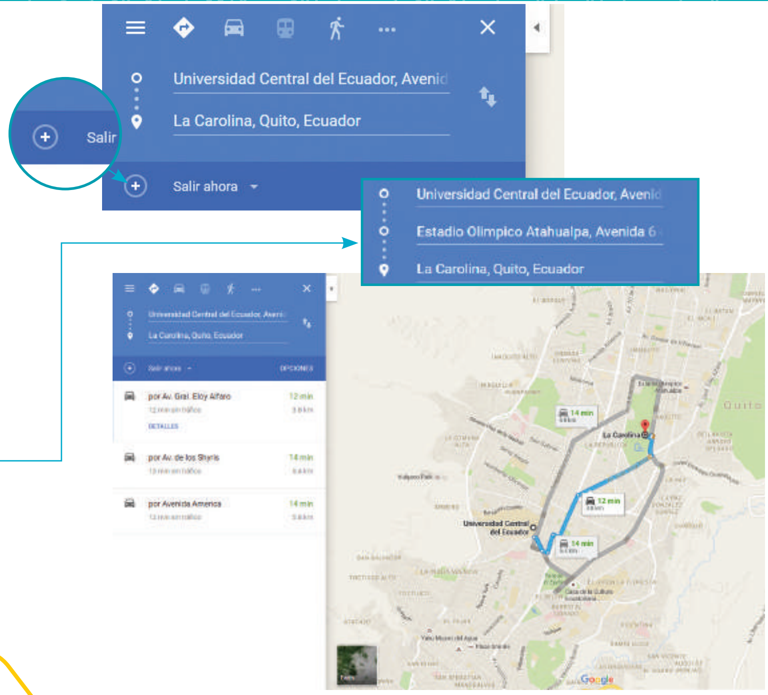
4 Añade un destino intermedio a la ruta

a. Ve a la barra de búsqueda de Google Maps y da clic sobre el ícono + .

b. Ubica el nombre o dirección del destino intermedio entre el inicial (tu colegio) y final (universidad escogida), por ejemplo, un centro comercial.

c. Arrastra el nuevo destino en medio del Colegio y la Universidad seleccionada.

d. Observa que en la ruta ahora aparezca el destino intermedio.



5 Comparte la ruta

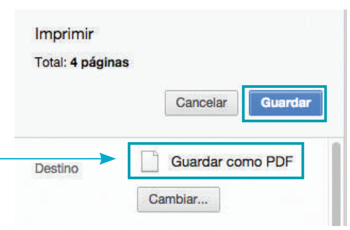
a. En Google Maps, da clic sobre *Detalles* en la barra de búsqueda, luego sobre el ícono de impresión y selecciona la opción *Imprimir con mapas*.

b. En la ventana emergente, selecciona Guardar como PDF y luego da clic sobre el botón *Guardar*.

c. Redacta un correo dirigido a tus compañeros de clase y profesor donde justifiques la importancia de visitar la facultad de matemáticas de la universidad seleccionada. Se sugiere dar por lo menos cuatro razones.

d. Incluye en el mensaje de correo la dirección electrónica de la página de la universidad y la ruta en formato PDF como archivo adjunto. Luego, haz clic en *Enviar*.





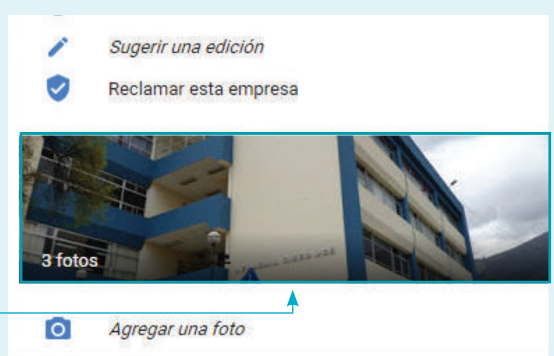
Aprende más

Observa fotos del sitio que se va a visitar, en Google Maps.

a. Da clic sobre el sitio de destino en la ruta.

b. Bajo la barra de búsqueda aparecerá más información sobre el destino final. Da clic sobre *Fotos* del sitio.

c. Repite el paso 5.



Evaluación de la unidad

Sistemas de ecuaciones

Ejercitación

1. Determina si cada afirmación es verdadera (V) o falsa (F), según corresponda.

a. Si las pendientes de dos rectas son iguales, el sistema tiene solución. ( )

b. Si el producto de dos pendientes es igual a -1, el sistema no tiene solución. ( )

c. Si el producto de dos pendientes es igual a cero, el sistema no tiene solución. ( )

d. Si las pendientes de dos rectas son iguales, el sistema no tiene solución. ( )

e. Si la solución del sistema de dos ecuaciones es un conjunto infinito, las rectas son iguales. ( )

Razonamiento

2. Analiza y responde. El sistema $\begin{cases} 2x - y - 1 = 0 \\ -\frac{6}{3}x + 3y + 3 = 0 \end{cases}$

a. Tiene una única solución.

b. Tiene infinitas soluciones.

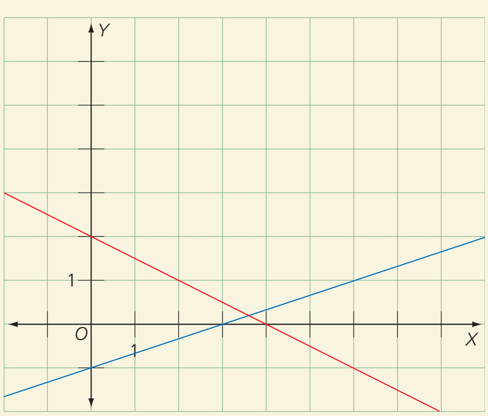
c. No tiene solución.

d. Corresponde a dos rectas perpendiculares.

Resolución gráfica de sistemas

Modelación

3. Identifica el sistema de ecuaciones a partir de la siguiente gráfica. Luego, establece la solución al sistema.



Resolución de sistemas por sustitución

Resolución de problemas

4 Determina la medida de dos ángulos si son suplementarios y, además, la diferencia entre ellos es igual a siete veces el ángulo menor.

5 Calcula cuántos carritos y cuántas motos tiene Carlos si se sabe que tiene 80 vehículos de colección entre carritos y motos. Además, el número de carros supera en dos al número de motos.

Resolución de sistemas por reducción

Modelación

6 Determina los valores de a, b y c, a partir del siguiente sistema $\begin{cases} x + y - 2 = 0 \\ ax + by + c = 0 \end{cases}$ y conociendo quue las dos rectas son perpendiculares y la solución del mismo es (1,1).

Resolución de problemas

7 Calcula sus edades actuales de Felipe y Ricardo si se sabe que hace siete años, la edad de Felipe era tres veces la edad de Ricardo. Además, dentro de siete años la edad de Ricardo será el doble de la edad de Felipe.

8 Determina el número de dos cifras que cumple que la suma de sus dígitos es el triple de la cifra de las decenas. Además, se conoce que la cifra de las unidades excede en cuatro a la de las decenas.

Resolución de sistemas por la regla de Cramer

Comunicación

9. Determina de los siguientes sistemas los que tienen una única solución.

a. $\begin{cases} 2x + 5y = 0 \\ -10x - 25y = 0 \end{cases}$

b. $\begin{cases} x - y + 4 = 0 \\ -2x + 2y + 6 = 0 \end{cases}$

c. $\begin{cases} 6x - y = 2 \\ 6x - y = -2 \end{cases}$

d. $\begin{cases} 2x + y - 1 = 0 \\ -2x + y - 1 = 0 \end{cases}$

e. $\begin{cases} x + 4y = 3 \\ -8y = -2x + 6 \end{cases}$

f. $\begin{cases} x + 2y - 1 = 0 \\ 2x + y - 1 = 0 \end{cases}$

Razonamiento

10 Determina si el enunciado es verdadero (V) o falso (F) según corresponda.

a. Si el determinante es cero, el sistema no tiene solución. ( )

b. Un sistema de tres ecuaciones lineales con tres incógnitas siempre tiene solución única. ( )

c. Si el determinante es -1 el sistema tiene infinitas soluciones. ( )

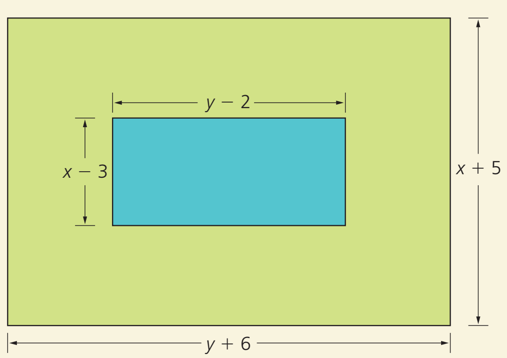
d. Para calcular el determinante de un sistema la dimensión del sistema debe ser n×n. ( )

e. Si el sistema no tiene solución, el determinante es cero. ( )

Resolución gráfica de sistemas

Modelación

11. Calcula las dimensiones del terreno total y el de la zona rectangular central, si se sabe que el perímetro del terreno externo mide 56 m, y que la zona central tiene 24 m de perímetro



Resolución de problemas mediante sistemas de ecuaciones

Comunicación

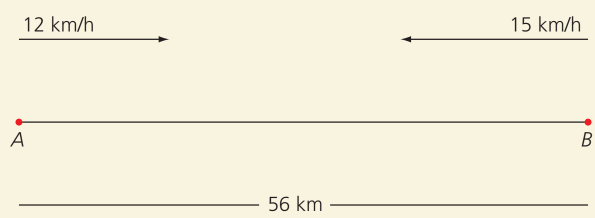
12 Analiza el siguiente sistema.

$$\begin{cases} ax + by + c = 0 \\ dx + ey + f = 0 \end{cases}$$

Determina cuáles son los casos en los que tiene infinitas soluciones o no tiene solución.

Resolución de problemas

13. Calcula el punto de encuentro y el tiempo transcurrido hasta que dos ciclistas se cruzan. Se sabe que cada uno parte de una ciudad diferente, que la distancia entre ellas es de 54 km, y que los ciclistas se trasladan con velocidades constantes de 15 km/h y 12 km/h respectivamente.



14. Determina el monto del capital invertido por un cliente de un banco, si se sabe que parte del capital está al 4 % de interés mensual, y la otra parte al 5 % mensual y de esta manera recibe $ 110 000 de intereses cada mes. Ten en cuenta que si hubiese hecho la inversión al contrario, recibiría $ 50 000 más.

Resolución de sistemas por el método de Gauss

Comunicación

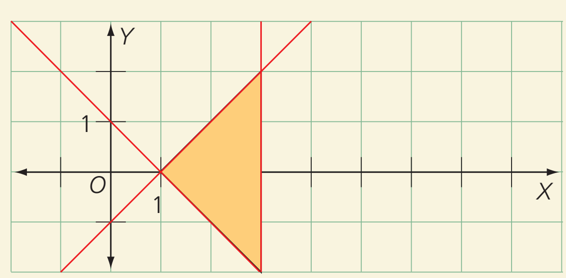
15. Aplica el método de Gauss para resolver el siguiente sistema:

$$\begin{cases} 3x - 2y = 8 \\ 2x - 3y = -3 \end{cases}$$

Inecuaciones de primer grado con dos incógnitas. Sistemas

Modelación

16. Determina el sistema que relaciona la región sombreada



4 Funciones y ecuaciones cuadráticas

BLOQUE

Álgebra y funciones

Una gran cantidad de fenómenos del mundo real, entre ellos el movimiento de los proyectiles y la forma de algunas construcciones como los puentes colgantes, se pueden describir mediante modelos matemáticos. Aunque estos son idealizaciones de la realidad, su objetivo es entender ampliamente el fenómeno y, tal vez, predecir su comportamiento en el futuro.

- ¿Cómo crees que un modelo matemático puede ayudar a predecir de qué manera se comportará un fenómeno particular?



Cultura del Buen Vivir

La libertad

Podemos entender la libertad como la capacidad del ser humano de obrar según su propia voluntad, sin dejar de ser responsable de sus actos.

- Nombra tres situaciones que hayas vivido en las que resultó fundamental tener libertad para obrar.

Aprenderás...

- Función cuadrática
- Gráficas de funciones cuadráticas
- Ecuaciones de segundo grado con una incógnita.
- Aplicaciones de la ecuación de segundo grado
- Función potencia

Resolución de problemas

Recursos digitales

LTIC

AI

E



Habilidades lectoras

Ecuaciones de segundo grado en la historia

Desde hace por lo menos 3 500 años, se resuelven problemas que dan lugar a ecuaciones. En los escritos de los antiguos babilonios y egipcios, se han descifrado tales problemas y la forma de resolverlos.

Algunas de las antiguas tablillas contienen problemas de tipo algebraico y geométrico, pero las soluciones no utilizan nociones de la geometría.

Un antiguo pergamino babilonio describe la solución de la siguiente ecuación:

$$x^2 - x = 870$$

"Tómese la mitad de 1, que es el coeficiente de x, y cuádrese. Entonces, súmese $\frac{1}{4}$ a 870 para obtener $\frac{3\,481}{4}$.

Ahora, tómese la raíz cuadrada de $\frac{3\,481}{4}$ para obtener $\frac{59}{2}$. Al número obtenido, adiciónese la mitad de 1, que es el coeficiente de x. El resultado obtenido, 30, es una solución de la ecuación".

Al traducir al lenguaje algebraico se observan los siguientes pasos:

$$x^2 - x + \frac{1}{4} = 870 + \frac{1}{4}$$

$$\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{3\,481}{4}$$

$$x - \frac{1}{2} = \frac{59}{2}$$

$$x = \frac{59}{2} + \frac{1}{2} = 30$$

Sm Ediciones. (2016). Colombia. Matemática 10.

Actividades

Interpreta

1. ¿Cuál es la diferencia entre la manera de resolver problemas algebraicos entre los antiguos babilonios y la manera como se resuelven actualmente?

Argumenta

2. ¿Cuál consideras que es el aporte del lenguaje algebraico al desarrollo de las matemáticas?

Propón

3. Amplía tus conocimientos sobre el trabajo con ecuaciones en las culturas antiguas y comparte los resultados de la investigación con tus compañeros.

1 Función cuadrática

Explora

El salto de cierta rana se puede modelar mediante la función:

$$h(t) = 2t - t^2$$

Donde t es el tiempo medido en segundos y h la altura en metros.



- ¿Cuánto durará el salto de la rana? ¿Cuál es la altura máxima que alcanza la rana en ese salto?

En la Tabla 1 se muestra la altura del salto de la rana en cinco momentos distintos.

t	0	0,5	1	1,5	2
$h(t)$	0	0,75	1	0,75	0

Tabla 1

Según los datos, la rana está en el piso cuando $t = 0$ y $t = 2$, pues su altura es 0 en ambos instantes. Es decir, $h(0) = 0$ y $h(2) = 0$.

El instante $t = 0$ corresponde al momento de iniciar el salto, y el instante $t = 2$ corresponderá al instante en que la rana vuelve al piso después de haber saltado. Esto significa que el salto tardó 2 segundos.

Por otra parte, la máxima altura que alcanza la rana corresponde al mayor valor de $h(t)$ registrado en la tabla. Este es 1, por lo cual se deduce que la mayor altura que alcanza la rana en este salto es de 1 m (figura1) .

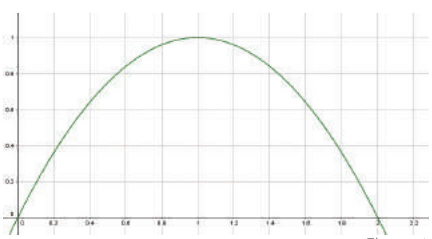


Figura 1

Muchas situaciones son modeladas mediante funciones que involucran el cuadrado de una variable. Este tipo de funciones se denominan **funciones cuadráticas**.

Una **función cuadrática** es de la forma $\boldsymbol{f(x) = ax^2 + bx + c}$, donde a, b y c son números reales y $a \neq 0$.

1.1 Representación gráfica de una función cuadrática

La representación gráfica de la función cuadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$ es una parábola que se caracteriza por tener los siguientes elementos.

- **Vértice (V):** punto donde la parábola alcanza su punto máximo, si $a < 0$, o su punto mínimo, si $a > 0$.
- **Cortes de la parábola con los ejes coordenados (ceros de la función):** puntos donde el valor de la función es 0. Las coordenadas de los puntos de corte con el eje X son de la forma $(x, 0)$. En estos casos, el valor de x se halla resolviendo la ecuación $ax^2 + bx + c = 0$.
- **Eje de simetría:** recta paralela al eje Y, que pasa por la coordenada x del vértice.
- **Concavidad:** una parábola es cóncava hacia arriba si $a > 0$ o es cóncava hacia abajo si $a < 0$.

Ten en cuenta

Toda parábola es simétrica, y sobre su eje de simetría se encuentra el vértice de la parábola que es el valor máximo o el valor mínimo que toma la función.

Actividad resuelta

Comunicación

1 Representa gráficamente la función $f(x) = -\dfrac{1}{2}x^2 - 2$.

Solución:

Para comenzar, se puede completar una tabla de valores como la Tabla 2, asignando valores arbitrarios a la variable x. Luego, se representan en el plano cartesiano.

x	$f(x)$
−4	−10
−2	−4
0	−2
2	−4
4	−10

Tabla 2

Como la función está definida para cualquier valor real, al trazar la curva se obtiene la Figura 1.

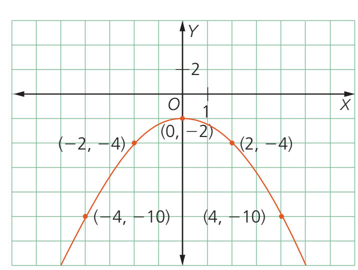


Figura 2

Destreza con criterios de desempeño: Definir y reconocer una función cuadrática de manera algebraica y gráfica.

Desarrolla tus destrezas

Ejercitacion

2 Identifica cuáles de las siguientes expresiones pueden representar una función cuadrática.

a. $f(x) = -16x^2 + 14x + 10$

b. $f(p) = 16p^3 + 14p^2 + 12$

c. $f(n) = -0{,}25n^2 - 0{,}5n + 1$

d. $f(x) = -6x + 1$

e. $f(t) = -4t - 5 + 32t^2$

3 Escribe cada función en la forma $f(x) = ax^2 + bx + c$. Luego, identifica los valores correspondientes de a, b y c.

a. $f(x) = 4x + 10 - 16x^2$

b. $f(x) = -6x + 5 + x^2$

c. $f(x) = x^2 + 10 - 6x$

d. $f(x) = -2 + x^2 - 4x$

Modelación

4 Escribe la ecuación del eje de simetría de cada parábola y las coordenadas del vértice.

a.

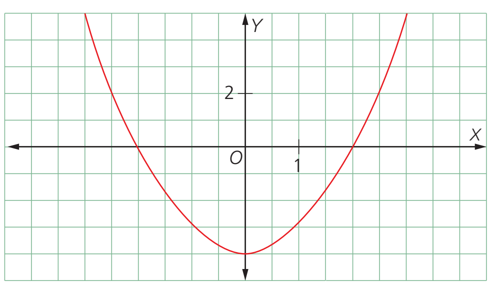


Figura 3

b.

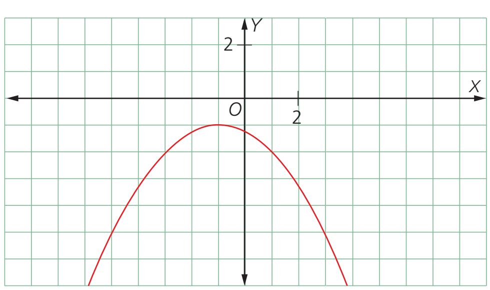


Figura 4

c.

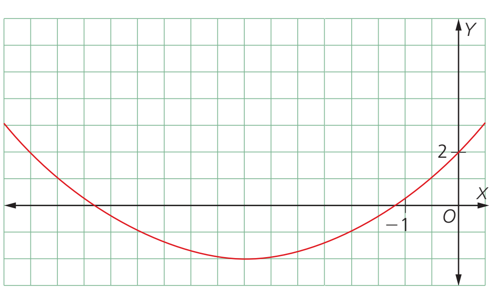


Figura 5

Razonamiento

5 Relaciona cada función cuadrática con la gráfica correspondiente.

a. $f(x) = x^2 - 6x + 10$

x	1	2	3	4	5
y	5	2	1	2	5

Tabla 3

b. $f(x) = -x^2 + 4$

x	−3	−2	0	2	3
y	−5	0	4	0	−5

Tabla 4

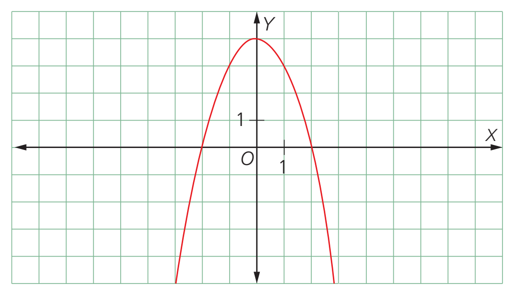


Figura 6

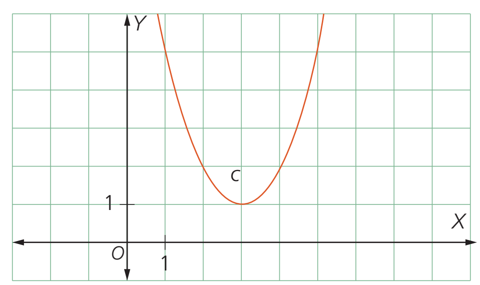


Figura 7

Resolución de problemas

6 El movimiento de cierta partícula está determinado por la función $f(x) = x^2 - 4$. Su trayectoria se muestra en la Figura 7.

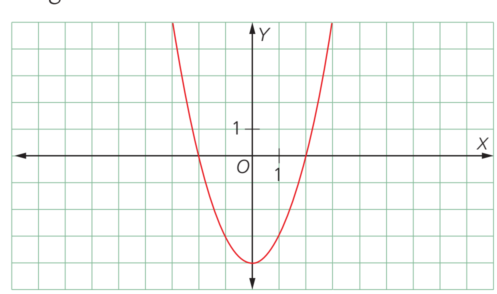


Figura 8

a. ¿Qué coordenadas tiene el punto más bajo que alcanza la partícula?

b. ¿En qué valores la trayectoria corta al eje vertical?

c. ¿En qué valores corta al eje horizontal?

2 Gráficas de funciones cuadráticas

Explora

Considera la función que le hace corresponder su cuadrado a cada número real, es decir:

$$f(x) = x^2$$

- Construye la tabla de valores y elabora su gráfica.

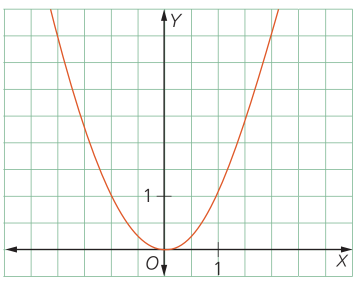


Figura 1

2.1 Funciones de la forma $f(x) = ax^2$

Al calcular algunos de los valores de la función $f(x)$, se obtiene la Tabla 1:

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3
y	16	9	4	1	0	1	4	9

Tabla 1

Al calcular la razón de cambio entre los pares de puntos del primer cuadrante se encuentra que esta no es constante y que siempre es positiva, luego es una función cuya gráfica no es una línea recta y es creciente en el primer cuadrante.

La razón de cambio en el segundo cuadrante tampoco es constante y es negativa, luego la función no tiene por gráfica una recta y es decreciente en el segundo cuadrante.

Además se cumple que $f(a) = f(-a)$ para todo número real a, así que f es simétrica con respecto al eje Y, es decir, es par. La gráfica con estas condiciones es una parábola, con vértice en (0, 0), como se observa en la Figura 1.

Una función definida por la expresión $y = ax^2$, con $a \neq 0$, se conoce como **función cuadrática con vértice en el origen**.

Ejemplo 1

Se puede determinar la variación de las gráficas de las funciones cuadráticas de la forma $f(x) = ax^2$, analizando el resultado para los distintos valores de a.

- Si $a > 1$, la gráfica de la función es una contracción de la gráfica de la función $f(x) = ax^2$. Si $0 < a < 1$, la gráfica de la función es una dilatación de la gráfica de la función $f(x) = ax^2$.

  En la Tabla 2, las parábolas representadas son $f(x) = x^2$, $g(x) = 2x^2$ y $h(x) = 4x^2$ para $a > 1$; y $f(x) = x^2$, $g(x) = 0{,}5x^2$ y $h(x) = 0{,}33x^2$ para $0 < a < 1$.

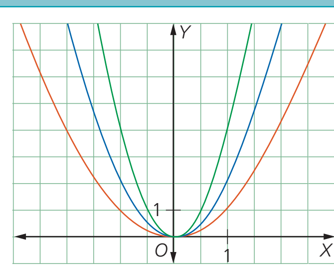
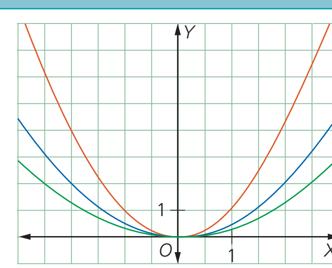
$a > 1$	$0 < a < 1$
	

Tabla 2

- Cuando $a < 0$, las gráficas de las funciones se obtienen reflejando las gráficas de los casos anteriores con respecto al eje X, como se ve en la Tabla 3.

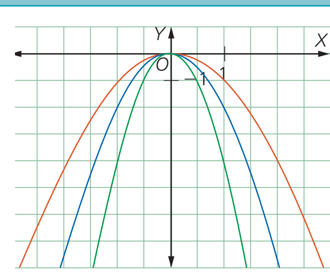
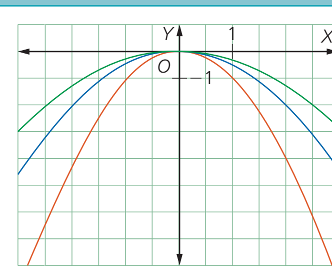
$a < -1$	$-1 < a < 0$
	

Tabla 3

Ten en cuenta

El dominio de la función cuadrática con vértice en el origen y = ax^2 corresponde al conjunto formado por todos los números reales y su recorrido depende del signo de a; si a es positivo, su recorrido son todos los reales positivos y si a es negativo, su recorrido corresponde a los reales negativos.

Ten en cuenta

La función cuadrática $f(x) = ax^2$ es una función par.

Ten en cuenta

El vértice de la parábola que describe la función $f(x) = ax^2$ es (0, 0); el eje de simetría de esta parábola es el eje Y.

Destreza con criterios de desempeño: Definir y reconocer una función cuadrática de manera algebraica y gráfica determinando sus características: dominio, recorrido, monotonía, máximos, mínimos, paridad.

2.2 Funciones de la forma $f(x) = ax^2 + c$

La parábola que describe la función $\mathbf{f(x) = ax^2 + c}$ es una traslación vertical de c unidades de la parábola $f(x) = ax^2$. Esta traslación es hacia arriba si $c > 0$ y hacia abajo si $c < 0$.

El vértice de la parábola $f(x) = ax^2 + c$ está ubicado en el punto $(0, c)$ y el eje de simetría es el eje Y.

Ejemplo 2

En la Figura 4 se muestra la representación gráfica de las funciones $g(x) = x^2 + 3$ y $h(x) = x^2 - 4$, a partir de la gráfica de $f(x) = x^2$.

La parábola correspondiente a $g(x) = x^2 + 3$ tiene un desplazamiento de 3 unidades hacia arriba con respecto a $f(x) = x^2$, y la parábola que corresponde a $h(x) = x^2 - 4$ tiene un desplazamiento de 4 unidades hacia abajo.

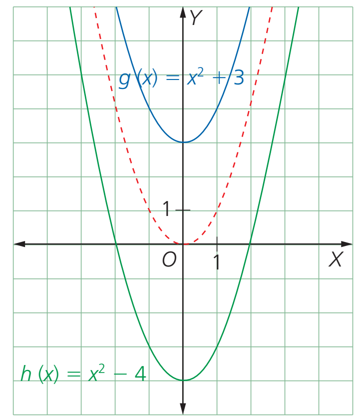


Figura 4

2.3 Funciones de la forma $f(x) = ax^2 + bx + c$

La función de la forma $\mathbf{f(x) = ax^2 + bx + c}$ es una función cuadrática en la cual a, b y c son todos diferentes de 0.

La función $f(x) = ax^2 + bx + c$ puede llevarse a una de las formas:

$$f(x) = a(x - h)^2 \text{ o } f(x) = a(x - h)^2 + k$$

- Si la función es de la forma $f(x) = a(x - h)^2$, el vértice de la parábola es el punto $(h, 0)$ y el eje de simetría es el eje Y.
- Si la función es de la forma $f(x) = a(x - h)^2 + k$, el vértice de la parábola es el punto (h, k) y el eje de simetría es la recta $x = h$.

Razonamiento matemático

Funciones cuadráticas

La parábola $y = x^2 + 8x + k$ tiene su vértice en el eje de las abscisas.

- ¿Cuál es el valor de k?

Ejemplo 3

- La función $g(x) = x^2 - 6x + 9$ se puede expresar como $g(x) = (x - 3)^2$, con lo cual se identifica que el vértice es (3, 0). Además, su gráfica se obtiene trasladando horizontalmente la parábola $f(x) = x^2$, 3 unidades a la derecha.
- La función $h(x) = x^2 + 4x + 4$ se puede expresar como $g(x) = (x + 2)^2$, por lo tanto, se concluye que su vértice es $(-2, 0)$. Su gráfica se obtiene trasladando horizontalmente la parábola $f(x) = x^2$, 2 unidades a la izquierda (Figura 5).

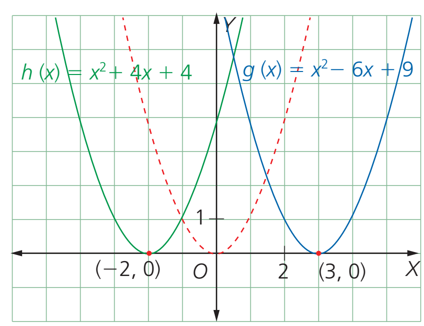


Figura 5

Actividad resuelta

Modelación

1 Elabora la gráfica de la parábola $g(x) = -3x^2 + 12x - 11$, teniendo en cuenta cómo varía con respecto a la parábola $f(x) = -3x^2$.

Solución:

La función $g(x) = -3x^2 + 12x - 11$ se puede expresar como:

$$g(x) = -3(x - 2)^2 + 1$$

A partir de la ecuación anterior, se sabe que:

Vértice: (2, 1) Eje de simetría: $x = 2$

Además, la gráfica se obtiene trasladando la parábola $f(x) = -3x^2$, 2 unidades a la derecha y 1 unidad hacia arriba (Figura 6).

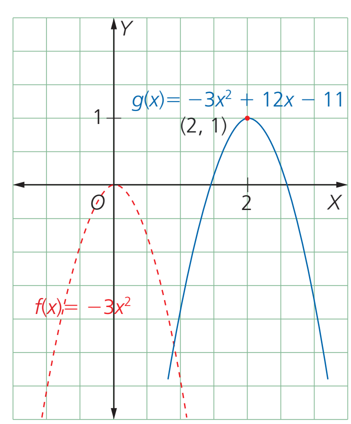


Figura 6

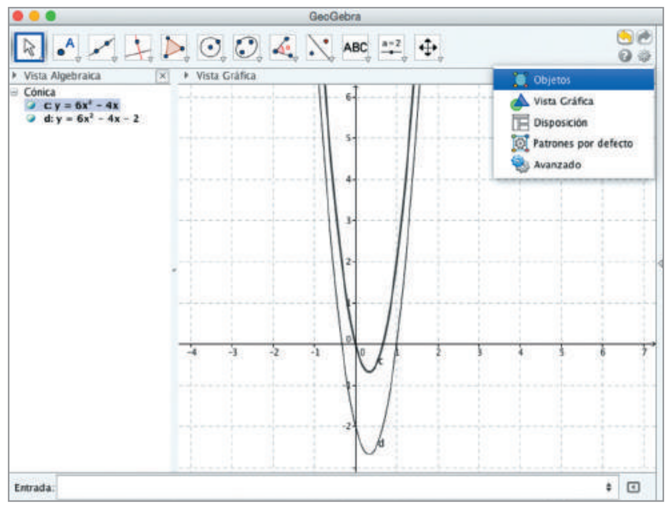
2 Gráficas de funciones cuadráticas

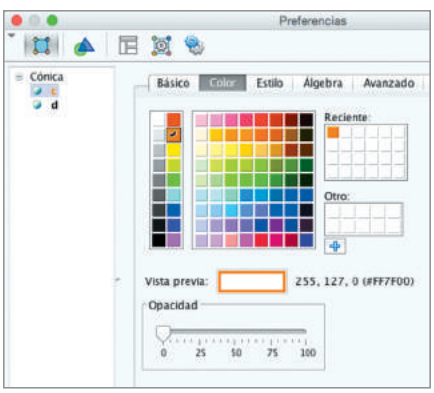
MatemaTICS

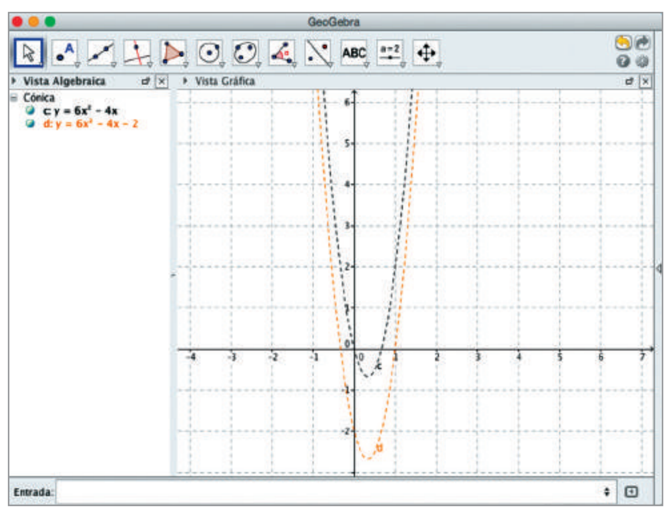
Grafica funciones cuadráticas usando GeoGebra

Observa el procedimiento para graficar las funciones $f(x) = 6x^2 - 4x$ y $f(x) = 6x^2 - 4x - 2$.

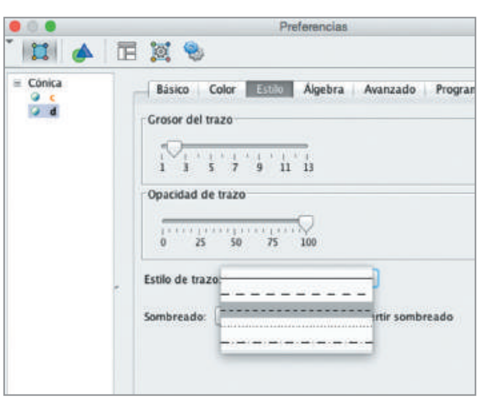
- Primero, selecciona en el menú *Apariencias*, la ventana *Álgebra* y *Gráficos*.
- Luego en la parte inferior de la ventana, en la barra *Entrada*, digita la primera función y presiona la tecla *Enter*. Luego, digita la segunda función.
- Ahora, cambia algunas preferencias del programa para poder observar con mayor claridad que la segunda función es una traslación de la primera.
- Para ello, selecciona en el menú *Apariencias*, la opción *Objetos*.
- Pon el cursor sobre la segunda función y presiona el menú *Objetos*. Allí selecciona la opción *Color* y elije uno para esta gráfica.







- Ahora, sin cerrar la ventana de *Preferencias*, pon el cursor sobre la primera función y presiona la opción *Estilo*. Allí selecciona *Estilo de trazo*.



Destreza con criterios de desempeño: Definir y reconocer una función cuadrática de manera algebraica y gráfica determinando sus características.

Desarrolla tus destrezas

Comunicación

2 Elabora las gráficas de las funciones cuadráticas de cada grupo en un mismo plano cartesiano. Explica sus diferencias y semejanzas.

a. $f(x) = 2x^2$ $g(x) = -2x^2$

b. $f(x) = \frac{1}{2}x^2$ $g(x) = 2x^2$

c. $f(x) = 2x^2$ $g(x) = 3x^2$ $h(x) = 4x^2$

d. $f(x) = -2x^2$ $g(x) = -3x^2$ $h(x) = -4x^2$

3 Halla el vértice de cada parábola. Luego, elabora una tabla de valores y la gráfica correspondiente.

a. $f(x) = x^2 - 4x$ b. $f(x) = x^2 - 2x$

c. $f(x) = x^2 + 2x$ d. $f(x) = x^2 - 6x$

4 Determina la ecuación de la función cuadrática que define cada tabla de valores.

a.

x	-2	-1	0	1	2
y	1	-2	-3	-2	1

Tabla 4

b.

x	-2	-1	0	1	2
y	$-\frac{7}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{7}{2}$

Tabla 5

5 Lleva cada función a la forma $f(x) = a(x - h)^2 + k$. Luego, escribe las coordenadas del vértice de la parábola que la representa.

a. $f(x) = x^2 + 2x + 3$

b. $f(x) = x^2 - 2x + 5$

c. $f(x) = 3x^2 + 6x + 4$

Razonamiento

6 Observa la Figura 7. Luego, explica qué tipo de transformación sufrió la parábola *a* para obtener la parábola *b*. Determina las funciones que las describen.

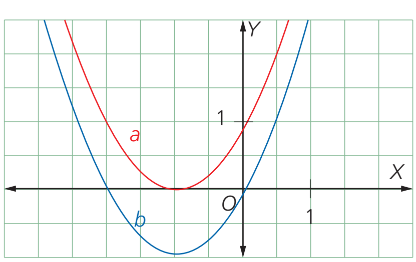


Figura 7

7 Determina la función que corresponde a cada parábola, e indica si es una función par o impar.

a.

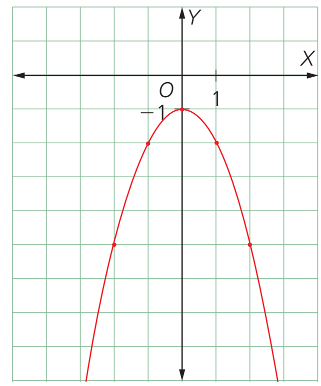


Figura 8

b.

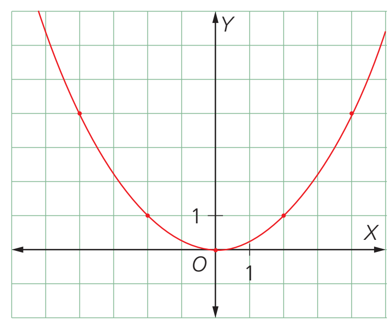


Figura 9

c.

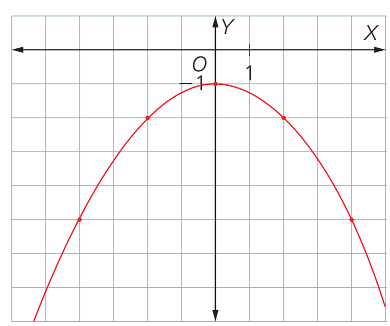


Figura 10

Resolución de problemas

8 El movimiento de una pelota puede expresarse mediante la función $f(x) = -5x^2 + 20x + 10$, donde x representa el tiempo en segundos y $f(x)$, la altura en metros. ¿Qué altura alcanza la pelota al transcurrir 2 segundos desde el inicio del movimiento?

3 Ecuaciones de segundo grado con una incógnita

Explora

El perímetro del rectángulo de la Figura 1 es 24 cm y su área es 35 cm^2.

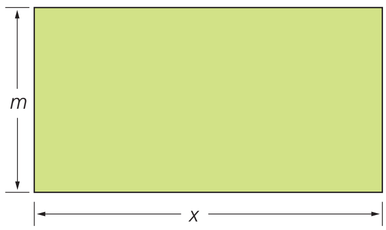


Figura 1

- ¿Cuáles son las dimensiones de dicho rectángulo?

En términos algebraicos, el perímetro y el área del rectángulo se pueden expresar así:

$$\text{Perímetro: } P = 2x + 2m$$

$$\text{Área: } A = x \cdot m$$

Teniendo en cuenta los datos, se pueden plantear las siguientes ecuaciones:

$$24 = 2x + 2m, \text{ de donde } 12 = x + m$$

$$35 = x \cdot m$$

Al despejar m en la expresión para el perímetro se tiene que $m = 12 - x$, y al reemplazar este valor en la expresión del área se tiene que:

$$35 = x \cdot (12 - x) \Rightarrow 35 = 12x - x^2$$

$$\Rightarrow x^2 - 12x + 35 = 0$$

Esta es una ecuación cuadrática, ya que la máxima potencia de la incógnita x es 2.

Al resolver esta ecuación se obtiene que las dimensiones del rectángulo son 7 cm y 5 cm, respectivamente.

Una **ecuación cuadrática o de segundo grado** es una expresión de la forma $ax^2 + bx + c = 0$, donde a, b y c son números reales y $a \neq 0$.

La ecuación de segundo grado $ax^2 + bx + c = 0$ es:

- **Completa**, si $b \neq 0$ y $c \neq 0$.
- **Incompleta**, si $b = 0$ o $c = 0$. Es decir, presenta alguna de las formas $ax^2 + c = 0$ o $ax^2 + bx = 0$.

3.1 Resolución de la ecuación de la forma $ax^2 + c = 0$

La **ecuación cuadrática de la forma $ax^2 + c = 0$**, con a y c números reales, se resuelve despejando la incógnita x. Puede tener dos raíces o soluciones reales o no tener ninguna solución real.

Ejemplo 1

- Para resolver la ecuación $5x^2 - 12 = 0$ se pueden aplicar las propiedades de las igualdades, como se muestra a continuación:

$5x^2 - 12 = 0$	Se parte de la ecuación dada.
$5x^2 - 12 + 12 = 0 + 12$	Se suma 12 en ambos lados de la igualdad.
$5x^2 = 12$	Se efectúan las operaciones.
$x^2 = \frac{12}{5}$	Se divide entre 5 en ambos lados de la igualdad.
$x = \pm\sqrt{\frac{12}{5}} = \pm\frac{2\sqrt{15}}{5}$	Se extrae la raíz cuadrada.
$x_1 = \frac{2\sqrt{15}}{5}$ o $x_2 = -\frac{2\sqrt{15}}{5}$	Se obtienen las soluciones.

- Al aplicar las propiedades de las igualdades para resolver la ecuación $3x^2 + 11 = 0$, se obtiene que:

$$3x^2 + 11 = 0 \Rightarrow 3x^2 + 11 - 11 = 0 - 11 \Rightarrow 3x^2 = -11$$

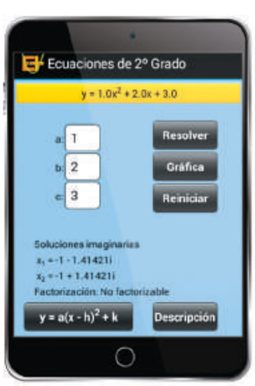
$$\Rightarrow x^2 = -\frac{11}{3} \Rightarrow x = \pm\sqrt{-\frac{11}{3}}$$ No corresponde a un número real.

De acuerdo con lo anterior, la ecuación $3x^2 + 11 = 0$ no tiene raíces reales.

App

Ecuaciones de segundo grado con una incógnita

Abre la aplicación *Ecuaciones de 2º Grado*, ingresa el valor de los coeficientes, resuelve el sistema y visualiza las soluciones gráficamente.



Destrezas con criterios de desempeño:
- Reconocer los ceros de la función cuadrática como la solución de la ecuación de segundo grado con una incógnita.
- Resolver la ecuación de segundo grado con una incógnita de manera analítica (por factoreo) en la solución de problemas.

3.2 Resolución de la ecuación de la forma $ax^2 + bx = 0$

La **ecuación cuadrática de la forma $ax^2 + bx = 0$**, con a y b números reales, se puede resolver mediante la factorización.

El método para resolver una ecuación cuadrática de la forma $ax^2 + bx = 0$ se basa en usar el factor común en la expresión y analizar las condiciones de dichos factores.

Ejemplo 2

Observa cómo se resuelve la ecuación $-2x^2 + 6x = 0$ mediante la factorización.

$-2x^2 + 6x = 0$	Se parte de la ecuación dada.
$2x(-x + 3) = 0$	Se extrae el factor común $2x$.
$2x = 0$ o $-x + 3 = 0$	Si $m \cdot n = 0$, entonces $m = 0$ o $n = 0$.
$x = 0$ o $x = 3$	Se encuentran los valores de la incógnita x.

En general, la ecuación cuadrática $ax^2 + bx = 0$ tiene dos raíces o soluciones reales de la forma:

$$x = 0 \text{ o } x = -\frac{b}{a}$$

Ejemplo 3

La ecuación $-2x^2 + 6x = 0$ es de la forma $ax^2 + bx = 0$, con $a = -2$ y $b = 6$. Por lo tanto, las soluciones se pueden hallar como sigue:

$$x_1 = 0 \text{ y } x_2 = -\frac{b}{a} = -\frac{6}{-2} = 3$$

3.3 Resolución de la ecuación de la forma $x^2 + bx + c = 0$

La **ecuación cuadrática de la forma $x^2 + bx + c = 0$**, con a, b y c números reales, se puede resolver aplicando la factorización de trinomios.

Ejemplo 4

Para resolver la ecuación $x^2 + 2x - 15 = 0$ se procede de la siguiente forma:

- Se factoriza la expresión algebraica.

  $x^2 + 2x - 15 = 0$

  $(x + 5)(x - 3) = 0$

- Se analiza cada uno de los factores, teniendo en cuenta que el producto es cero:

  $(x + 5) = 0$ o $(x - 3) = 0 \Rightarrow x = -5$ o $x = 3$

Así, las soluciones de la ecuación $x^2 + 2x - 15 = 0$ son $x = -5$ y $x = 3$.

Ejemplo 5

Para calcular las dimensiones de un mural cuyo ancho es 3 m menos que su largo y su área es de 18 m², se plantea y resuelve la ecuación $x(x - 3) = 18$, con x la longitud del largo del mural. Esta ecuación es equivalente a $x^2 - 3x - 18 = 0$, y al aplicar la factorización se tiene:

$$x^2 - 3x - 18 = 0 \Rightarrow (x - 6)(x + 3) = 0$$
$$\Rightarrow (x - 6) = 0 \text{ o } (x + 3) = 0$$
$$\Rightarrow x_1 = 6 \text{ o } x_2 = -3$$

Por lo tanto, las dimensiones del mural son 6 m de largo y 3 m de ancho.

CULTURA del Buen Vivir

La libertad

Para obrar con libertad (es decir, según nuestra propia voluntad) es necesario que confluyan dos condiciones, responsabilidad para actuar y normas y leyes claras.

- Escribe sobre tres situaciones de la vida cotidiana donde es importante saber ejercer la libertad.

Ten en cuenta

Las soluciones reales de la ecuación de segundo grado de la forma $x^2 + bx + c = 0$ corresponden con los puntos de corte con el eje X de la gráfica de la función $f(x) = x^2 + bx + c$.

3 Ecuaciones de segundo grado con una incógnita

3.4 Resolución de la ecuación de la forma $ax^2 + bx + c = 0$

La **ecuación cuadrática de la forma $ax^2 + bx + c = 0$**, con a, b y c números reales, se resuelve mediante la factorización del trinomio $ax^2 + bx + c$, siempre y cuando este sea factorizable.

Ejemplo 6

Para resolver la ecuación $10x^2 - 33x - 7 = 0$, se puede proceder como sigue:

$10x^2 - 33x - 7 = 0$	Se parte de la ecuación dada.
$10(10x^2 - 33x - 7) = 0 \cdot 10$	Se multiplica en ambos lados de la ecuación por el coeficiente de x.
$(10x)^2 - 33(10x) - 70 = 0$	Se efectúan las operaciones.
$(10x - 35)(10x + 2) = 0$	Se factoriza la expresión.
$(10x - 35) = 0$ o $(10x + 2) = 0$	Se iguala a 0 cada factor.
$x_1 = \frac{7}{2}$ o $x_2 = -\frac{1}{5}$	Se resuelven las ecuaciones resultantes.

Luego, la ecuación $10x^2 - 33x - 7 = 0$ tiene dos raíces reales:

$$x_1 = \frac{7}{2} \text{ y } x_2 = -\frac{1}{5}$$

Razonamiento matemático

Ecuaciones cuadráticas

El número -1 es la solución de la ecuación $3x^2 + bx + c = 0$.

- Si los coeficientes b y c son números primos, ¿cuál es el valor de $3c - b$?

Actividades resueltas

Comunicación

1 Halla la solución de estas ecuaciones.

a. $5x^2 - 9x + 4 = 0$ **b.** $3x^2 - 4x - 4 = 0$

Solución:

En los dos casos se aplica la factorización de trinomios.

a. $5x^2 - 9x + 4 = 0 \Rightarrow 5(5x^2 - 9x + 4) = 0 \Rightarrow (5x^2) - 9(5x) + 20 = 0$

$\Rightarrow (5x - 5)(5x - 4) = 0 \Rightarrow x_1 = 1 \text{ y } x_2 = \frac{4}{5}$

b. $3x^2 - 4x - 4 = 0 \Rightarrow 3(3x^2 - 4x - 4) = 0 \Rightarrow (3x^2) - 4(3x) - 12 = 0$

$\Rightarrow (3x - 6)(3x + 2) = 0 \Rightarrow x_1 = 2 \text{ y } x_2 = -\frac{2}{3}$

Resolución de problemas

2 La suma de los cuadrados de dos números naturales consecutivos es 313. ¿Cuáles son estos números?

Solución:

Si x representa el número menor, la situación se puede modelar mediante la ecuación $x^2 + (x + 1)^2 = 313$, la cual es equivalente a:

$$2x^2 + 2x - 312 = 0$$

Entonces:

$2x^2 + 2x - 312 = 0 \Rightarrow 2(x^2 + 2x - 312) = 0 \Rightarrow (2x)^2 + 2(2x) - 624 = 0$

$\Rightarrow (2x + 26)(2x - 24) = 0 \Rightarrow x_1 = -13 \text{ y } x_2 = 12$

De acuerdo con el enunciado del problema, la solución $x = -13$ no satisface las condiciones planteadas. De modo que la solución válida es $x = 12$, y el número siguiente será $x + 1 = 13$.

Al comprobar la solución se tiene que $12^2 + 13^2 = 313$.

Destrezas con criterios de desempeño:
- Reconocer los ceros de la función cuadrática como la solución de la ecuación de segundo grado con una incógnita.
- Resolver la ecuación de segundo grado con una incógnita de manera analítica (por factoreo) en la solución de problemas.

Desarrolla tus destrezas

Ejercitación

3 Une cada ecuación con su respectiva solución.

a. $x^2 - 36 = 0$	$x_1 = 9$ y $x_2 = -9$
b. $x^2 - 24 = 0$	$x_1 = 2\sqrt{6}$ y $x_2 = -2\sqrt{6}$
c. $x^2 - 81 = 0$	$x_1 = -\sqrt{2}$ y $x_2 = \sqrt{2}$
d. $2x^2 - 4 = 0$	$x_1 = 6$ y $x_2 = -6$
e. $4x^2 - 4 = 0$	$x_1 = 1$ y $x_2 = -1$

4 Resuelve cada ecuación. Luego, verifica que la solución sea correcta.

a. $x^2 - 6x = 0$

b. $x^2 + 27x = 0$

c. $3x^2 + 5x = 0$

d. $-3x^2 + 4x = 0$

e. $1{,}5x^2 - 0{,}5x = 0$

f. $4x - 4x^2 = 0$

Razonamiento

5 Resuelve la ecuación. Luego, explica en cada caso qué relación existe entre las soluciones y la parábola que representa la ecuación de segundo grado.

a. $x^2 - 5x + 6 = 0$

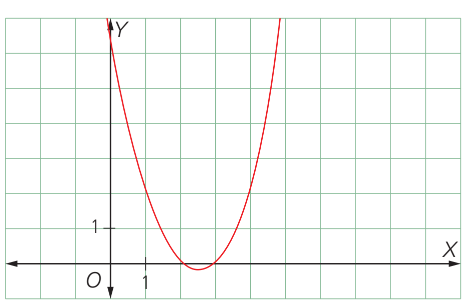


Figura 2

b. $-x^2 + 3x + 4 = 0$

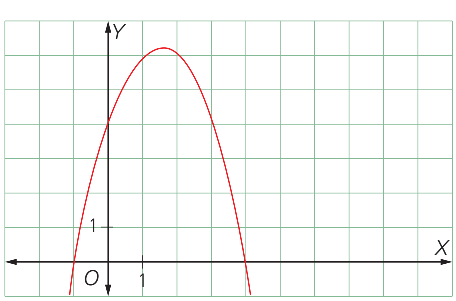


Figura 3

Ejercitación

6 Resuelve las ecuaciones cuadráticas dadas. Luego, verifica que las respuestas sean correctas.

a. $6x^2 - 14x + 8 = 0$

b. $6x^2 + 7x - 3 = 0$

c. $4x^2 - 3x - 10 = 0$

d. $-10x^2 + 17x - 3 = 0$

e. $-7x^2 + 11x - 4 = 0$

Razonamiento

7 Determina en cada caso si la afirmación es verdadera (V)o falsa (F). Justifica tu respuesta.

a. Todas las ecuaciones cuadráticas tienen exactamente dos soluciones.

b. Las ecuaciones cuadráticas incompletas solo tienen dos términos.

c. La factorización es una herramienta para resolver ecuaciones cuadráticas.

d. La ecuación $x^2 + 9 = 0$ tiene como soluciones a $x = 3$ y a $x = -3$.

e. Las soluciones de la ecuación $26x^2 + 11x + 10 = 0$ son dos números enteros positivos.

Modelación

8 Escribe una ecuación cuadrática que se relacione con la gráfica de la Figura 4.

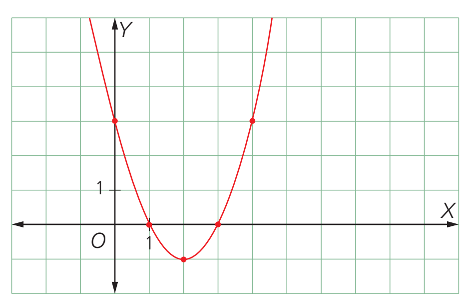


Figura 4

Resolución de problemas

9 Se sabe que el voltaje de cierto circuito eléctrico puede representarse mediante la ecuación $x^2 - 2x + 10 = 0$. Si la ecuación tiene soluciones reales, el voltaje del circuito es directo, pero si las soluciones son números complejos, el voltaje del circuito es alterno. ¿Qué clase de voltaje tiene este circuito?

4 Resolución de ecuaciones de segundo grado completando un trinomio cuadrado perfecto

Explora

La suma de dos números es 10 y la suma de sus cuadrados es 58.

- ¿Qué números cumplen las condiciones anteriores?

Si se designa a x como uno de los números, entonces $10 - x$ representará al otro. De este modo, al establecer las relaciones dadas en el problema, se plantea la ecuación:

$$x^2 + (10 - x)^2 = 58$$

Se observa que la ecuación $x^2 + (10 - x)^2 = 58$ es equivalente a $2x^2 - 20x + 42 = 0$. Para resolver esta última, se puede **completar un trinomio cuadrado perfecto**, como se presenta a continuación.

$x^2 - 10x + 21 = 0$	Se dividen los dos lados de la ecuación por 2.
$x^2 - 10x = -21$	Se agrupan los terminos con x.
$x^2 - 10x + 25 = -21 + 25$	Se busca el tercer término del trinomio cuadrado perfecto y se suma en los dos miembros de la ecuación.
$(x - 5)^2 = 4$	Se factoriza el trinomio cuadrado perfecto.
$\sqrt{(x-5)^2} = \pm\sqrt{4}$	Se extrae la raíz cuadrada en los dos miembros de la ecuación.
$x - 5 = 2$ o $x - 5 = -2$	Se resuelven las ecuaciones lineales obtenidas.
$x_1 = 7$ o $x_2 = 3$	Se determinan las soluciones.

De acuerdo con lo anterior, los números cuya suma es 10 y la suma de sus cuadrados es 58 son 7 y 3.

Toda ecuación cuadrática $\boldsymbol{ax^2 + bx + c = 0}$, con a, b y c números reales, se puede resolver **completando un trinomio cuadrado perfecto**. En general, para hallar el tercer término del trinomio cuadrado perfecto se utiliza la expresión $\dfrac{b^2}{4a}$.

Ten en cuenta

Es posible que una ecuación de segundo grado no tenga soluciones en el conjunto de los números reales. En este caso, la parábola que describe dicha ecuación no tiene cortes con el eje X. Observa un ejemplo en la Figura 1.

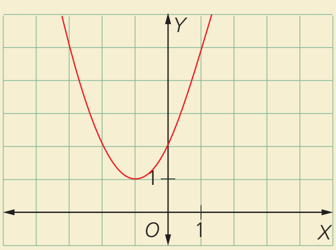


Figura 1

Actividad resuelta

Comunicación

1 Resuelve la ecuación de segundo grado $x^2 - 13x + 42 = 0$, completando cuadrados. Luego, elabora la gráfica de la parábola que describe el trinomio. Por último, describe la relación entre la ecuación y la parábola que la representa.

Solución:

Al observar los coeficientes de la ecuación $x^2 - 13x + 42 = 0$, se deduce que $a = 1$ y $b = -13$. Así, el término que completa el trinomio cuadrado perfecto estará dado por $\dfrac{b^2}{4a} = \dfrac{169}{4}$.

Por lo tanto:

$$x^2 - 13x + 42 = 0 \Rightarrow x^2 - 13x = -42 \Rightarrow x^2 - 13x + \frac{169}{4} = -42 + \frac{169}{4}$$

$$\Rightarrow \left(x - \frac{13}{2}\right)^2 = \frac{1}{4} \Rightarrow \sqrt{\left(x - \frac{13}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{4}}$$

$$\Rightarrow x - \frac{13}{2} = \pm\frac{1}{2} \Rightarrow x = \pm\frac{1}{2} + \frac{13}{2}$$

$$\Rightarrow x_1 = \frac{1}{2} + \frac{13}{2} = 7 \text{ y } x_2 = -\frac{1}{2} + \frac{13}{2} = 6$$

Al graficar la parábola que representa la expresión $x^2 - 13x + 42$, se obtiene la curva de la Figura 2. En ella, se puede observar que los valores 7 y 6 son los puntos de corte de la parábola con el eje X.

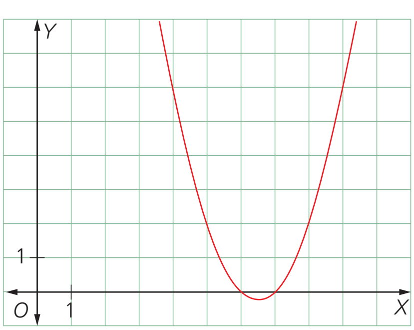


Figura 2

Destrezas con criterios de desempeño:
- Resolver la ecuación de segundo grado con una incógnita de manera analítica (por completación de cuadrados) en la solución de problemas.
- Reconocer los ceros de la función cuadrática como la solución de la ecuación de segundo grado con una incógnita.

Desarrolla tus destrezas

Ejercitación

2 Resuelve estas ecuaciones de segundo grado. Ten en cuenta que todas las expresiones son un trinomio cuadrado perfecto.

a. $9x^2 - 12x + 4 = 0$ b. $x^2 + 2x + 1 = 0$

c. $4x^2 + 4x + 1 = 0$ d. $16x^2 - 24x + 9 = 0$

e. $x^2 - 6x + 9 = 0$ f. $4x^2 - 12x + 9 = 0$

3 Resuelve cada ecuación completando un trinomio cuadrado perfecto.

a. $x^2 + 2x - 15 = 0$ b. $x^2 - 13x - 30 = 0$

c. $9x^2 - 12x + 4 = 0$ d. $4x^2 + 12x - 16 = 0$

e. $x^2 + 10x - 7 = 0$ f. $9x^2 + 10x + 1 = 0$

Comunicación

4 Plantea la ecuación cuadrática asociada con cada gráfica. Luego, resuelve dicha ecuación.

a.

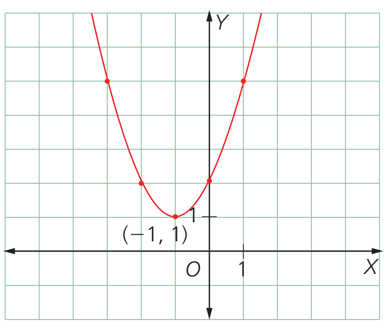


Figura 3

b.

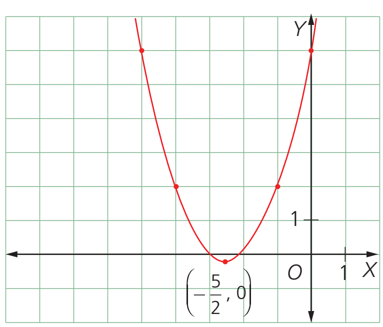


Figura 4

c.

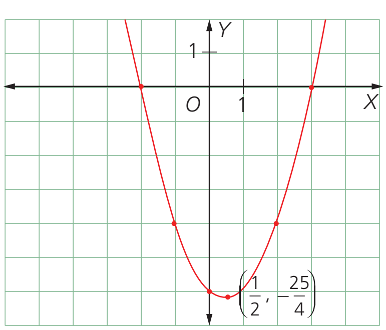


Figura 5

Resolución de problemas

5 A continuación se presentan varios rectángulos cuya área está dada. Determina la longitud de la base y la altura de cada uno, teniendo en cuenta las expresiones algebraicas correspondientes.

a. $b = x + 1$
$h = x + 4$

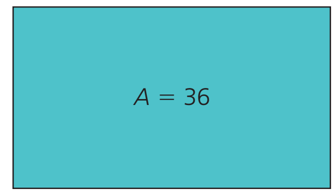


Figura 6

b. $b = x + 1$
$h = x - 2$

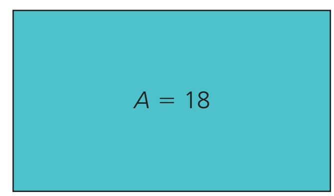


Figura 7

c. $b = x + 3$
$h = x + 4$

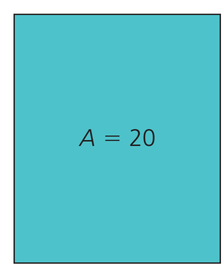


Figura 8

6 Andrea debe elaborar una maceta de base rectangular para su invernadero, de modo que el largo de la base tenga 30 cm más que su ancho y su altura sea de 20 cm. Además, la maceta debe contener 360 dm^3 de tierra. ¿Cuáles deben ser las medidas de la maceta?

7 El marco de un cuadro es cuadrado y su área es de 121 cm^2. ¿Cuál es la ecuación que debe plantearse para calcular la medida x del lado del cuadro? ¿Cuáles son las dimensiones del cuadro?

5 Fórmula general para resolver una ecuación de segundo grado

Explora

Una compañía de alimentos diseña una caja sin tapa para empacar sus productos con un volumen igual a 72 dm³. Sus dimensiones están representadas en la Figura 1.

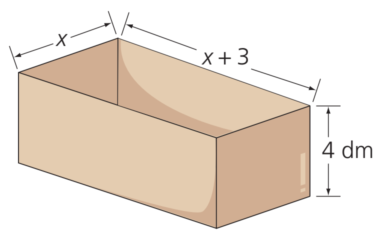


Figura 1

- Plantea una ecuación que te permita encontrar las dimensiones de la caja en decímetros.

Dadas las condiciones del problema, la ecuación que modela la situación es:

Expresión algebraica del volumen

$$4x(x+3) = 72$$

La ecuación anterior es equivalente a $4x^2 + 12x - 72 = 0$ y se puede resolver aplicando la **fórmula general para resolver ecuaciones de segundo grado,** que se deduce del proceso para completar trinomios cuadrados perfectos, como se observa a continuación.

$ax^2 + bx + c = 0$	Se parte de la ecuación de segundo grado.
$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$	Se divide toda la expresión entre el coeficiente de x^2.
$x^2 + \frac{b}{a}x = -\frac{c}{a}$	Se resta $\frac{c}{a}$ en ambos lados de la ecuación.
$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2} = \frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a}$	Se suma $\frac{b^2}{4a^2}$ para completar el trinomio cuadrado perfecto.
$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a}$	Se factoriza el trinomio cuadrado perfecto y se opera.
$x + \frac{b}{2a} = \pm\sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}}$	Se extrae la raíz cuadrada en ambos lados de la ecuación.
$x = -\frac{b}{2a} \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$	Se despeja la incógnita.
$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$	Se obtiene la fórmula general.

Así, en la ecuación $4x^2 + 12x - 72 = 0$, $a = 4$, $b = 12$ y $c = -72$, por lo tanto:

$$x = \frac{-12 \pm \sqrt{12^2 - 4 \cdot 4 \cdot (-72)}}{2 \cdot 4} \Rightarrow x = \frac{-3 \pm 9}{2} \Rightarrow x_1 = 3 \text{ o } x_2 = -6$$

Al considerar las condiciones del problema, se deduce que la respuesta válida es $x = 3$, de modo que las dimensiones de la caja son:

ancho: 3 dm largo: 6 dm alto: 4 dm

La **fórmula general para resolver ecuaciones de la forma $ax^2 + bx + c = 0$**, con a, b y c números reales, es:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Ejemplo 1

Observa cómo se aplica la fórmula general en la ecuación $x^2 - 2x - 960 = 0$. Como $a = 1$, $b = -2$ y $c = -960$, entonces:

$$x = \frac{-(-2) \pm \sqrt{(-2)^2 - 4(1)(-960)}}{2(1)} = \frac{2 \pm \sqrt{4 + 3840}}{2} = \frac{2 \pm 62}{2}$$

$$\Rightarrow x_1 = \frac{2 + 62}{2} = 32 \text{ y } x_2 = \frac{2 - 62}{2} = -30$$

CULTURA del Buen Vivir

La libertad

La libertad no consiste simplemente en hacer lo que se quiere ni en divertirse irresponsablemente, aunque algunos lo piensen así.

- Conversa con tus compañeros sobre el significado de ser una persona libre y qué se debe tener en cuenta para serlo de manera responsable.

Destrezas con criterios de desempeño:
- Resolver la ecuación de segundo grado con una incógnita de manera analítica (por fórmula) en la solución de problemas.
- Aplicar las propiedades de las raíces de la ecuación de segundo grado con una incógnita para resolver problemas.

5.1 Discriminante de una ecuación de segundo grado

La expresión $b^2 - 4ac$ recibe el nombre de **discriminante.** Es el valor que determina el tipo de raíces de la ecuación de segundo grado.

Dada la ecuación de segundo grado $ax^2 + bx + c = 0$, con a, b y c números reales, se consideran los siguientes casos:

- Si $b^2 - 4ac = 0$, la ecuación tiene una única solución real.
- Si $b^2 - 4ac > 0$, la ecuación tiene dos soluciones reales.
- Si $b^2 - 4ac < 0$, la ecuación tiene dos soluciones complejas.

Ejemplo 2

Observa cómo se determina el tipo de soluciones de las ecuaciones cuadráticas $x^2 + 6x + 9 = 0$, $3x^2 + 5x + 6 = 0$ y $2x^2 + 5x - 3 = 0$, analizando su discriminante.

- El discriminante de la ecuación $x^2 + 6x + 9 = 0$ es:

$$b^2 - 4ac = 6^2 - 4 \cdot 1 \cdot 9 = 0$$

Por lo tanto, la ecuación tiene una única solución real.

- El discriminante de la ecuación $2x^2 + 5x - 3 = 0$ es:

$$b^2 - 4ac = 5^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-3) = 49 > 0$$

De modo que la ecuación tiene dos soluciones reales.

- El discriminante de la ecuación $3x^2 + 5x + 6 = 0$ es:

$$b^2 - 4ac = 5^2 - 4 \cdot 3 \cdot 6 = -47 < 0$$

Luego, la ecuación tiene dos soluciones complejas.

5.2 Suma y producto de las soluciones de una ecuación de segundo grado

Si x_1 y x_2 son soluciones de la ecuación de segundo grado $ax^2 + bx + c = 0$, se cumplen las siguientes propiedades:

$$\mathbf{x_1 + x_2 = \frac{-b}{a}} \text{ y } \mathbf{x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}}$$

Ten en cuenta

La ecuación de la forma:

$$ax^2 + bx + c = 0$$

es equivalente a la ecuación:

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$$

Esto permite relacionar las raíces de la ecuación de segundo grado con sus coeficientes.

Actividad resuelta

Razonamiento

1 Determina una ecuación de la forma $ax^2 + bx + c = 0$, tal que la suma de sus soluciones sea $\frac{1}{6}$, y el producto sea $-\frac{1}{3}$.

Solución:

Dividiendo los dos miembros de la ecuación $ax^2 + bx + c = 0$ por a, se obtiene la ecuación equivalente $x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$.

Además, se cumple que:

$x_1 + x_2 = \frac{1}{6}$, entonces $\frac{1}{6} = \frac{-b}{a}$

$x_1 \cdot x_2 = -\frac{1}{3}$, entonces $-\frac{1}{3} = \frac{c}{a}$

La ecuación es $x^2 - \frac{1}{6}x - \frac{1}{3} = 0$, y se puede escribir como $6x^2 - x - 2 = 0$.

5 Fórmula general para resolver una ecuación de segundo grado

Desarrolla tus destrezas

Ejercitación

2 Resuelve las siguientes ecuaciones usando la fórmula general para resolver ecuaciones cuadráticas.

a. $x^2 + 3x - 10 = 0$ b. $x^2 - 3x - 4 = 0$

c. $-x^2 - 4x - 2 = 0$ d. $-2x^2 - x = -6$

e. $(x + 2)^2 + 1 = 0$ f. $(x - 3)^2 - 4 = 0$

g. $-0,5\,x^2 + 2x + 1,5 = 0$ h. $1,5\,x^2 + 2x = 0$

Razonamiento

3 Responde las preguntas a partir de la resolución de la ecuación $x^2 + 2x + 4 = 0$, mediante la fórmula general.

a. ¿Se pueden determinar las soluciones de la ecuación?

b. ¿Son las soluciones números reales?

c. Si el signo del término independiente cambia, ¿son las soluciones números reales?

d. ¿Cuál podría ser un criterio para cuando las soluciones pueden ser o no números reales?

4 Observa las siguientes parábolas y sus respectivas ecuaciones. Luego, utiliza la fórmula general para resolver cada ecuación. ¿De qué tipo son sus soluciones? ¿Qué tienen en común las parábolas que las representan?

a. $y = x^2 + 2x + 3$

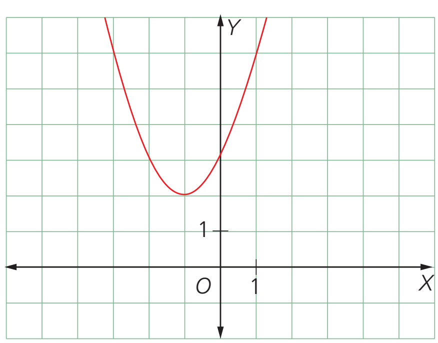


Figura 2

b. $y = -2x^2 - 3x - 2$

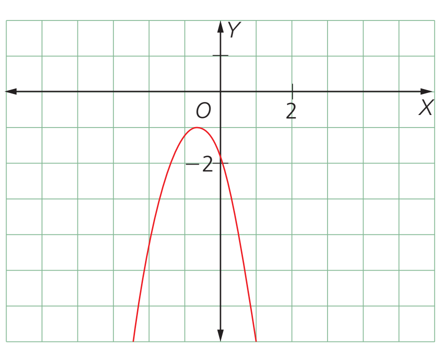


Figura 3

5 Forma ecuaciones cuadráticas con los siguientes términos. Luego, examina los discriminantes de dichas ecuaciones y escribe de qué tipo serían sus soluciones.

TÉRMINOS INDEPENDIENTES

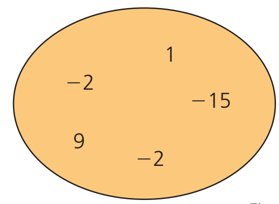


Figura 4

TÉRMINOS AL CUADRADO

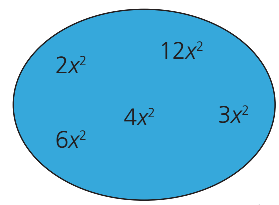


Figura 5

TÉRMINOS LINEALES

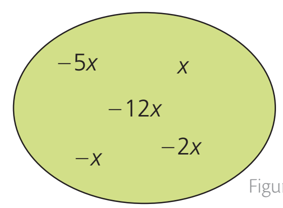


Figura 6

- Intercambia las ecuaciones que formaste con las de uno de tus compañeros; cada uno deberá resolver en el cuaderno las que intercambió utilizando la fórmula general.

6 Determina el tipo de raíces que tiene cada ecuación estudiando su discriminante. Luego, resuélvela aplicando la fórmula general.

a. $8x^2 - 5x + 1 = 0$

b. $6x^2 + x + 2 = 0$

c. $x(2x - 3) = 20$

d. $x - 2x^2 = 8$

e. $2x^2 + x - 2 = 0$

f. $-3x^2 - x + 1 = 0$

g. $x^2 - 3 - \frac{2}{3}x = 0$

Destrezas con criterios de desempeño:
- Resolver la ecuación de segundo grado con una incógnita de manera analítica (por fórmula) en la solución de problemas.
- Aplicar las propiedades de las raíces de la ecuación de segundo grado con una incógnita para resolver problemas.

Ejercitación

7 Resuelve las siguientes ecuaciones utilizando la ecuación cuadrática.

a. $(x + 1)(x - 5) = 16$

b. $(x + 1)(x + 4) = 4$

c. $(x - 2)(x - 3) = 4$

8 Escribe la ecuación cuadrática para la cual las soluciones son las mostradas en cada literal.

a. $x_1 = 2$, $x_2 = 4$

b. $x_1 = -1$, $x_2 = -9$

c. $x_1 = 0$, $x_2 = -5$

d. $x_1 = 4 + 2i$, $x_2 = 4 - 2i$

e. $x_1 = 1 + i$, $x_2 = 1 - i$

Modelación

9 Observa los cortes de cada parábola con el eje X. Luego, escribe la ecuación cuadrática que se relaciona con ella.

a.

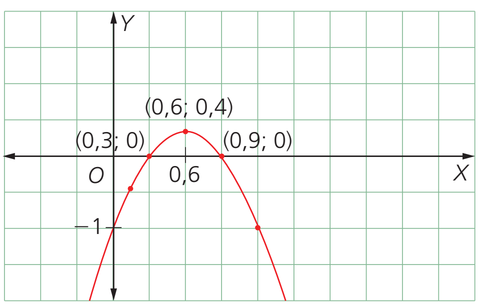


Figura 7

b.

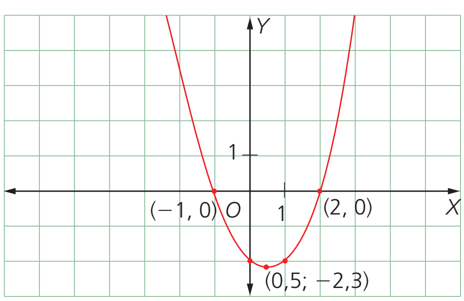


Figura 8

c.

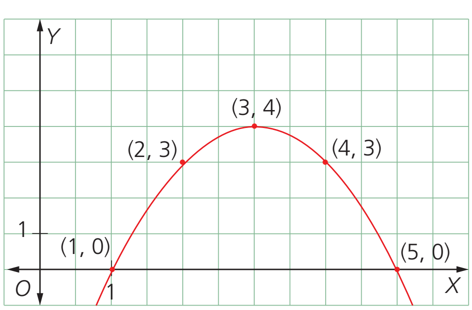


Figura 9

10 Completa la tabla para cada ecuación.

a. $-x^2 + 4x + 5 = 0$

Soluciones	
Función cuadrática asociada a la ecuación	
Vértice de la parábola que representa	

Tabla 1

b. $-3x^2 + 9x = 0$

Soluciones	
Función cuadrática asociada a la ecuación	
Vértice de la parábola que representa	

Tabla 2

c. $2x^2 - 12x + 8 = 0$

Soluciones	
Función cuadrática asociada a la ecuación	
Vértice de la parábola que representa	

Tabla 3

d. $x^2 - 4x + 13 = 0$

Soluciones	
Función cuadrática asociada a la ecuación	
Vértice de la parábola que representa	

Tabla 4

Resolución de problemas

11 Examina la Figura 10 y determina las ecuaciones cuadráticas asociadas a cada parábola. ¿De qué tipo son las soluciones de cada ecuación?

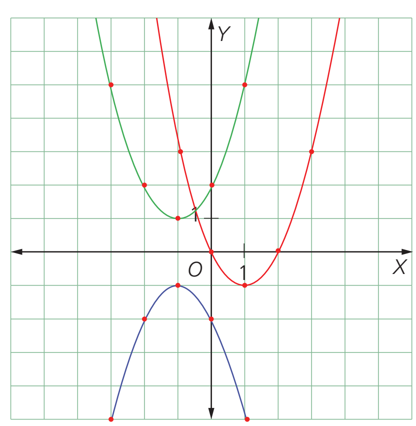


Figura 10

6 Aplicaciones de la ecuación de segundo grado

Explora

El triángulo *ABC* de la Figura 1 tiene un ángulo recto en *B*.

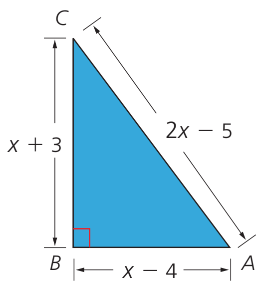


Figura 1

- ¿Cuál es su área? ¿Cuál su perímetro?

Para hallar el área y el perímetro del triángulo *ABC* se debe determinar el valor de x.

En este caso, como el triángulo es rectángulo, se puede hacer uso del teorema de Pitágoras con el fin de establecer una relación entre sus lados, con lo cual se obtiene la siguiente ecuación.

Suma de los cuadrados de los catetos

$$(x + 3)^2 + (x - 4)^2 = (2x - 5)^2$$

Cuadrado de la hipotenusa

Al simplificar la ecuación anterior, se obtiene una ecuación cuadrática que se puede resolver mediante alguno de los métodos estudiados anteriormente.

$$(x + 3)^2 + (x - 4)^2 = (2x - 5)^2 \Rightarrow -2x^2 + 18x = 0$$
$$\Rightarrow -2x(x - 9) = 0 \Rightarrow x_1 = 0 \text{ o } x_2 = 9$$

De acuerdo con las condiciones del problema, se deduce que la respuesta válida es $x = 9$, por lo tanto, se obtiene que las medidas de los lados del triángulo son:

$$x + 3 = 12 \qquad x - 4 = 5 \qquad 2x - 5 = 13$$

El área del triángulo es $A = \dfrac{5 \cdot 12}{2} = 30$ unidades cuadradas y el perímetro es $12 + 5 + 13 = 30$ unidades.

Las ecuaciones de segundo grado permiten resolver de manera adecuada y precisa muchos problemas que se plantean en la vida real o que están relacionados con otras áreas del conocimiento.

Ten en cuenta

La ecuación de segundo grado tiene aplicaciones en estas áreas:

- Geometría, con la aplicación del concepto de área.
- Economía, con la modelación de situaciones de producción, ganancias y pérdidas, entre otras.
- Física, con la modelación de la caída libre o del movimiento parabólico de proyectiles.
- Aritmética, con la búsqueda de cantidades que verifican diferentes condiciones.

Actividad resuelta

Modelación

1 El área de la cancha de la Figura 2 es 195 m^2.

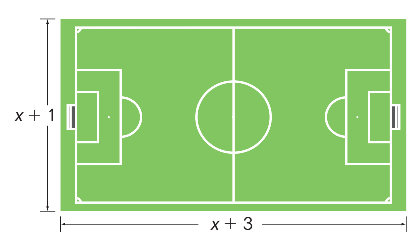


Figura 2

¿Cuáles son las dimensiones de la cancha?

Solución:

La expresión algebraica correspondiente del área de la cancha es:

$(x + 1)(x + 3) = 195$, que es equivalente a $x^2 + 4x - 192 = 0$.

Si se quiere resolver la ecuación, se puede usar la fórmula general para resolver una ecuación cuadrática. De este modo:

$$x = \frac{-4 \pm \sqrt{4^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-192)}}{2 \cdot 1} \Rightarrow x = \frac{-4 \pm 28}{2 \cdot 1} \Rightarrow x_1 = 12 \text{ o } x_2 = -16$$

Se observa que solo $x = 12$ satisface las condiciones del problema y con este valor se obtiene que las dimensiones de la cancha son 13 m y 15 m.

Destreza con criterios de desempeño: Resolver y plantear problemas con enunciados que involucren modelos con funciones cuadráticas e interpretar y juzgar la validez de las soluciones obtenidas dentro del contexto del problema.

Desarrolla tus destrezas

Modelación

2 Plantea una ecuación cuadrática para cada situación y, luego, resuélvela.

a. La diagonal de un rectángulo mide 10 cm. Halla sus dimensiones si uno de sus lados mide 2 cm menos que el otro.

b. Encuentra dos números positivos que se diferencien en 7 unidades y para los cuales el producto sea 44.

c. Encuentra dos números cuya suma sea 10 y su producto sea 24.

d. El largo de un campo de fútbol mide 30 m más que su ancho y su área es de 7 000 m^2. ¿Cuáles son sus dimensiones?

e. Halla el área de un triángulo isósceles, cuya altura mide 12 m y su lado mide tres metros más que su base.

f. La diagonal de un rectángulo mide 10 cm. Calcula sus dimensiones si el lado de menor medida es $\frac{3}{4}$ del lado de mayor medida.

g. ¿Cómo se puede repartir el número 20 de tal manera que la suma de sus cuadrados sea 202?

h. El área de un triángulo rectángulo mide 24 m^2. Si la longitud de un cateto es igual a $\frac{3}{4}$ la longitud del otro, ¿cuánto miden los lados del triángulo?

Resolución de problemas

3 Para fabricar una caja en forma de prisma rectangular, como la de la Figura 3, se utiliza una pieza cuadrada de cartón cuyo lado mide x dm.

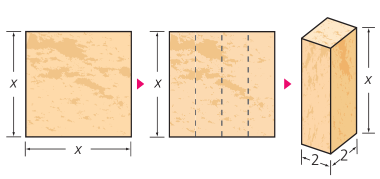


Figura 3

La pieza de cartón se dobla de manera que se forman cuatro rectángulos, cada uno de los cuales tiene un área de $2x$ dm^2.

a. ¿Cuál es la ecuación que expresa la relación entre el área total de la pieza de cartón y la suma de las áreas de las caras laterales del prisma?

b. Según la ecuación anterior, ¿cuál es el valor de la longitud x?

c. ¿Cuáles son las dimensiones de los rectángulos que forman la caja?

4 Una compañía que inicia sus operaciones, proyecta que sus utilidades anuales, $p(x)$, en miles de dólares, se pueden calcular mediante la función $p(x) = 4x + 1{,}2x^2 - 8$, donde x es el número de años en operación.

a. ¿Cuál será la utilidad o pérdida de la compañía después del primer año?

b. ¿Qué tiempo será necesario para que la compañía alcance su punto de equilibrio?

5 Se ha determinado que para calcular el promedio de la expectativa de vida de una persona de t años de edad, donde $30 \leqslant t \leqslant 100$, puede emplearse la función $q(t) = 0{,}0054t^2 + 1{,}46t + 95{,}11$. Si una persona tiene una expectativa de vida de 143 años, ¿cuál será la edad que tiene actualmente?

6 En un laboratorio, los científicos han detectado que la población de bacterias disminuye con la administración de cierto antibiótico, pero, luego de un tiempo, estas se vuelven inmunes y crecen nuevamente. Ellos encontraron que la función que modela la población de bacterias es $P(x) = \frac{3}{64}x^2 - \frac{3}{4}x + 4$, donde P es la población de bacterias(en miles de individuos) y x los miligramos de antibiótico suministrado diariamente.

¿Cuál es la población que existe antes de que la bacteria se vuelva inmune?

7 Una persona se ubica en la parte más alta de una plataforma de salto. Al lanzarse desde 20 m de altura, la trayectoria que sigue la persona está descrita por la función $f(x) = -\frac{11}{18}(x - 6)^2 + 22$.



SM Ediciones

¿Cuál es la distancia horizontal recorrida por la persona?

8 Plantea y resuelve un problema que se relacione con la ecuación $x^2 + 3x - 10 = 0$, utiliza GeoGebra para graficarla y verifica tu respuesta.

Practica Más

Función cuadrática

Comunicación

1. Determina los elementos de la función cuadrática representada en la Figura 1.

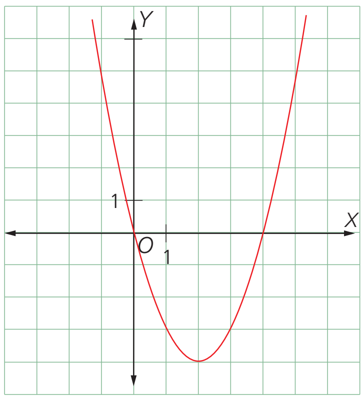


Figura 1

2. Representa una función cuadrática con las siguientes características.

a. Vértice en $(2, -4)$

b. Puntos de corte con el eje X $(-2, 0)$ y $(6, 0)$

Gráficas de funciones cuadráticas

Comunicación

3. Representa las siguientes funciones.

a. $f(x) = 2 - x^2$ b. $f(x) = x^2 + 2x$

c. $f(x) = -3x^2$ d. $f(x) = 0{,}5x^2$

e. $f(x) = x^2 + 5$ f. $f(x) = -x^2 - 5$

g. $f(x) = x^2 + 2x + 5$ h. $f(x) = x^2 - 4x + 6$

4. Halla el vértice, el eje de simetría y los puntos de corte con el eje X de la parábola que representa cada función.

a. $f(x) = x^2 - 16$ b. $f(x) = 9x^2$

c. $f(x) = x^2 - 2x$ d. $f(x) = 2x^2 - 12x + 18$

Razonamiento

5. Determina la expresión algebraica de la función cuadrática representada en la Figura 2.

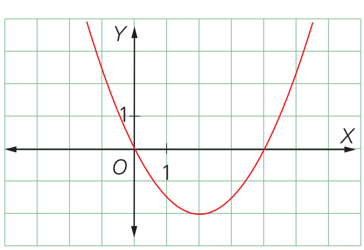


Figura 2

Ecuaciones de segundo grado con una incógnita

Comunicación

6. Relaciona la ecuación con sus soluciones.

a. $x^2 - 4 = 0$ 1. 4 y -3

b. $(x + 8)^2 = 0$ 2. -2 y 2

c. $x^2 + 6x + 9 = 0$ 3. -8

d. $(x - 4)(x + 3) = 0$ 4. -3

Resolución de problemas

7. Lee y resuelve.

a. Halla las dimensiones del rectángulo (Figura 3).

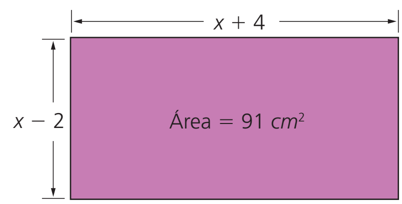


Figura 3

b. Halla la medida de la base y la altura del triángulo de la Figura 4.

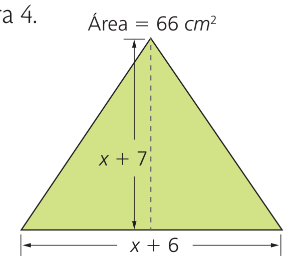


Figura 4

c. Halla la medida del lado del cuadrado (Figura 5).

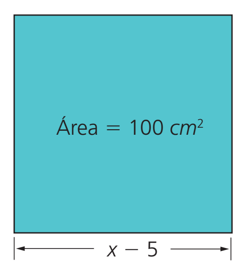


Figura 5

Resolución de ecuaciones de segundo grado

Ejercitación

8. Resuelve las siguientes ecuaciones.

a. $x^2 - 4 = 0$ b. $x^2 + 2 = 0$

c. $-3x^2 + x = 0$ d. $4x^2 - 2x = 0$

e. $x^2 + 5 = x$ f. $4x^2 + 2x - 3 = 8$

g. $x(x + 1) = 2x^2 + 5$ h. $3x^2 - x = x^2 - 4x$

Estrategia: Elaborar una gráfica

Problema

Si las medidas de los lados de un triángulo rectángulo son tres números enteros consecutivos, ¿cuáles son las dimensiones del triángulo?

1. Comprende el problema

- ¿Qué información proporciona el enunciado?

  R: El tipo de triángulo y la relación entre sus lados.

- ¿Qué debes averiguar?

  R: Las dimensiones del triángulo.

2. Crea un plan

- Realiza una representación gráfica de la situación, simboliza el enunciado y resuelve la ecuación que se plantee.

3. Ejecuta el plan

- En la Figura 1 se muestra la situación planteada.

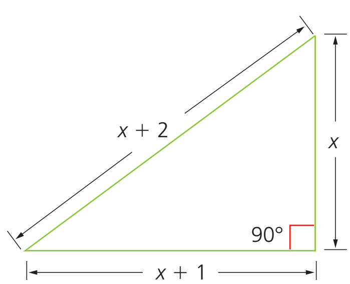


Figura 1

- Al aplicar el teorema de Pitágoras se tiene la ecuación:

$$x^2 + (x + 1)^2 = (x + 2)^2$$

- La ecuación es equivalente a:

$$x^2 - 2x - 3 = 0$$

- Se resuelve la ecuación por factorización:

$$(x - 3)(x + 1) = 0 \Rightarrow x_1 = 3 \text{ o } x_2 = -1$$

- Se descarta el valor negativo.

R: Las dimensiones del triángulo rectángulo son 3, 4 y 5.

4. Comprueba la respuesta

- Verifica que los lados del triángulo rectángulo cumplen el teorema de Pitágoras.

Aplica la estrategia

1. El largo de un rectángulo es 2 m más que el ancho y su área es 48 m². Si el ancho disminuye en 2 m y el largo aumenta en 2 m, el área disminuye en 8 m², ¿cuáles son las dimensiones del rectángulo?

   a. Comprende el problema

   ....

   ....

   b. Crea un plan

   ....

   ....

   c. Ejecuta el plan

   ....

   ....

   d. Comprueba la respuesta

   ....

   ....

Resuelve otros problemas

2. La función $f(x) = x^2 - 4x + 7$ corresponde a una parábola. ¿Cuál es el vértice de esta parábola?

3. Si la suma de un número con su recíproco es $\frac{5}{2}$, ¿cuál es el número?

4. Un grupo de estudiantes está organizando un paseo a un sitio turístico, y el costo es de $6 000, todo incluido. Cinco de ellos desistieron de ir, por esta razón cada uno de los restantes debe pagar $40 más. ¿Cuántos estudiantes van a ir a la excursión? ¿Cuánto debe pagar cada uno?

Formula problemas

5. Escribe un problema con la información de la Figura 2 y resuélvelo.

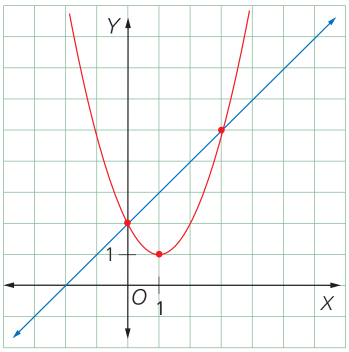


Figura 2

7 Función potencia

Explora

En la figura 1 se observa la gráfica de la función $f(x) = x^3$

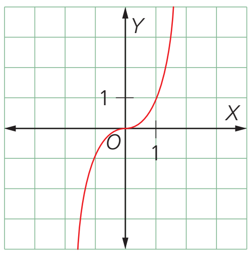


Figura 1

Estudia el comportamiento de la función e indica si es par o impar.

En la gráfica de la función $f(x) = -x^3$, se observa que:

- Su dominio es el conjunto de todos los números reales..
- Su recorrido es el conjunto de todos los números reales.
- Es creciente para todo valor de x.
- Es simétrica con respecto al origen, por lo tanto es una función impar.

$$f(-x) = (-x)^3 = -x^3 = -f(x)$$

$$f(-x) = -f(x)$$

Una función polinómica con un solo término, es una función potencia, también se las llama función monomial.

Las funciones de la forma $f(x) = k \cdot x^a$, donde k y a son constantes diferentes de cero, se denominan funciones potencia. La constante a es la potencia (exponente) y k es la constante de proporcionalidad.

Las funciones básicas $f(x) = x$; $f(x) = x^2$; $f(x) = x^3$, son funciones potencia comunes, en general, toda función polinómica es una función potencia o es la suma de funciones potencia.

Si $y = f(x)$ varía como una potencia constante de x, entonces y es una función potencia de x. En geometría, la mayoría de las funciones más comunes (fórmulas), son funciones potencia.

Nombre	Fórmula	Potencia (a)	Constante de probabilidad (k)
Área del cuadrado	$A = l^2$	2	1
Área del círculo	$A = \pi r^2$	2	π
Longitud de la circunferencia	$C = 2\pi r$	1	2π
Volumen del cubo	$V = l^3$	3	1

Tabla 1

Ten en cuenta

Ten en cuenta

$f(x) = x^n$, es una función par si n es par y es una función impar si n es impar.

Destreza con criterios de desempeño: Definir y reconocer funciones potencia con n= 1, 2, 3, representarlas de manera gráfica e identificar su monotonía.

Ejemplo 1

Las gráficas de las funciones $f(x) = 2x^3$ y $g(x) = -2x^3$ de las figuras 3 y 4, se obtuvieron a partir de los valores registrados en la siguiente tabla.

El dominio de estas funciones corresponde a todos los números reales. La función $f(x)$ es creciente entodo su dominio, mientras que la función $g(x)$es decreciente en todo su dominio. El recorrido de las dos funciones corresponde a todos los números reales.

x	$f(x)$	$g(x)$
−2	−16	16
−1	−2	2
0	0	0
1	2	−2
2	16	−16

Tabla 2

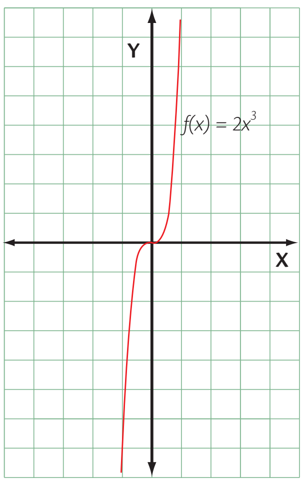


Figura 3

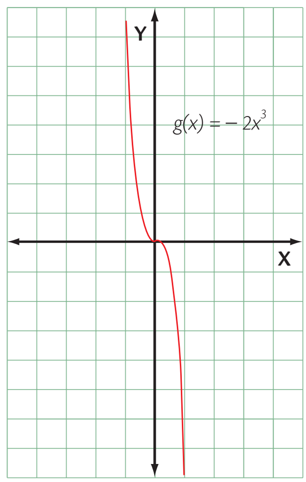


Figura 4

Actividad resuelta

Modelación

1 Representa la función $f(x) = 3x^2$. determina su dominio, su recorrido y su monotonía.

Solución:

La gráfica de f(x), se observa en la figura 5.

- Dominio: $\mathbb{R}$
- Recorrido: $\mathbb{R}^+$
- Monotonía:
  - Es decreciente en el intervalo $(-\infty, 0]$.
  - Es creciente en el intervalo $[0, +\infty)$.

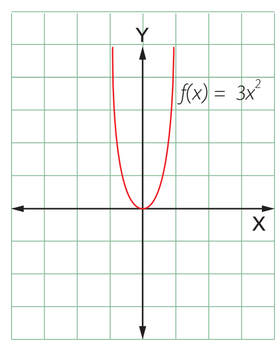


Figura 5

Desarrolla tus destrezas

Ejercitación

2 Representa la función $f(x) = -3x^2$, determina su dominio, recorrido y monotonía.

Razonamiento

3 ¿En qué intervalo es creciente la función potencia $f(x) = x$

4 Inventa una función potencia, grafícala y describe sus características.

Modelación

5 Con los valores de la tabla 3, dibuja la gráfica de la función potencia y determina si es creciente o decreciente.

x	$f(x)$
−2	−1
−1	−0,5
0	0
1	0,5
2	1

Tabla 3

Prueba Ser Estudiante

A continuación se presentan ejercicios con cuatro alternativas de solución, de las cuales, una sola es la correcta. Señala en la tabla de respuestas, el literal que consideres correcto.

1. ¿Cuál de las siguientes funciones, no es función potencia?

A. $f(x) = 2$
B. $f(x) = x$
C. $f(x) = -3x^2$
D. $f(x) = 3x^2 + 2$

2. La trayectoria de cierto satélite se ajusta a la gráfica de la función $f(x) = 6x^2 - 12$, donde x representa el tiempo en días y $f(x)$ el recorrido en kilómetros. ¿Cuántos kilómetros habrá recorrido el satélite al cabo de diez días desde su lanzamiento?:

A. el satélite habrá recorrido 585 km

B. el satélite habrá recorrido 588 km

C. el satélite habrá recorrido 587 km

D. el satélite habrá recorrido 586 km

3. La solución de la ecuación $5x^2 - 9x + 4 = 0$, es:

A. $x_1 = 1; x_2 = \frac{2}{5}$

B. $x_1 = 2; x_2 = \frac{1}{5}$

C. $x_1 = 1; x_2 = \frac{4}{5}$

D. $x_1 = 1; x_2 = \frac{3}{5}$

4. La solución de la ecuación $4x^2 - 4$, es:

A. $x_1 = 1;\ x_2 = -1$

B. $x_1 = 8;\ x_2 = -8$

C. $x_1 = 2;\ x_2 = -2$

D. $x_1 = -1;\ x_2 = 1$

5. El largo de una sala rectangular es 3 m mayor que el ancho. Si el ancho aumenta 3 m y el largo aumenta 2 m, el área se duplica. ¿Cuál es el área original de la sala?

A. 48 m^2
B. 24 m^2
C. 42 m^2
D. 40 m^2

6. Un número entero es tal que el cuadrado del antecesor de su doble es equivalente al cuadrado del número aumentado en 5. ¿Cuál es el número?

A. 8

B. 2

C. 12

D. 16

7. La ecuación cuadrática que tiene por raíces $x_1 = 3$ y $x_2 = -5$, es:

A. $x^2 + x + 15 = 0$

B. $x^2 + 5x - 3 = 0$

C. $x^2 + 3x - 5 = 0$

D. $x^2 + 2x - 15 = 0$

8. La solución de la ecuación $(x + 2)(x - 3) = 6$, utilizando la ecuación cuadrática es:

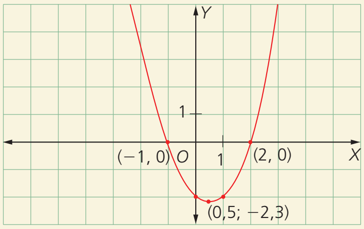
A. $x = +3$ o $x = 4$

B. $x = -3$ o $x = 2$

C. $x = +2$ o $x = 3$

D. $x = -3$ o $x = 4$

9. La ecuación cuadrática que se relaciona con la siguiente parábola es:



A. $x^2 - x - 2 = 0$

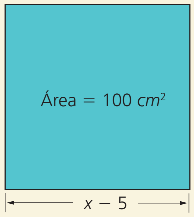
B. $x^2 + x + 1 = 0$

C. $x^2 - x - 2 = 0$

D. $x^2 - x - 1 = 0$

Indicadores de logro:
- Reconoce cuándo un problema puede ser modelado utilizando una función cuadrática y lo resuelve.
- Resuelve problemas que involucren ecuaciones de segundo grado y la aplicación de las propiedades de las raíces de la ecuación de segundo grado, juzga la validez de las soluciones obtenidas en el contexto del problema.
- Analiza la función potencia.

10. El valor de x en la siguiente figura es:



A. 15 cm **B.** 4 cm

C. 12 cm **D.** 16 cm

11. Si *d* dólares se invierten a un interés compuesto de *r* por ciento anual, al final de dos años el capital será A= $(1+r)^2$. ¿A qué interés $ 100 000 aumentará a $ 114 000 después de dos años?

A. 0,1 % **B.** 0,3 %

C. 0,2 % **D.** 0,4 %

12. Si la suma de un número con su recíproco es $\frac{15}{6}$, ¿cuál es el número?

A. 2 **B.** 10

C. 5 **D.** 20

13. La suma de un número más el doble de otro es igual a 11 y la diferencia de sus cuadrados es 16. ¿Cuáles son esos números?:

A. los números pueden ser 5 y 3, o $-\frac{37}{3}$ y $\frac{35}{3}$

B. los números pueden ser 5 y 6, o $-\frac{37}{3}$ y $\frac{35}{3}$

C. los números pueden ser 8 y 3, o $-\frac{37}{3}$ y $\frac{35}{3}$

D. los números pueden ser 6 y 3, o $-\frac{37}{3}$ y $\frac{35}{3}$

14. La diferencia de dos números es igual a 3 y si al cuadrado del primero se le resta el doble del cuadrado del segundo se obtiene 17. ¿Cuáles son los números?

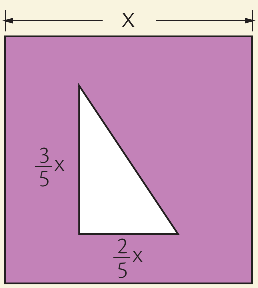
A. los números pueden ser 6 y 3, o 9 y 6

B. los números pueden ser 5 y 2, o 8 y 5

C. los números pueden ser 3 y 2, o 4 y 1

D. los números pueden ser 5 y 2, o 7 y 4

15. El área sombreada es 88 cm^2. ¿Cuál es el valor de x?



A. 25 cm **B.** 12 cm

C. 10 cm **D.** 18cm

16. El volumen de un cono está dado por la expresión $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$, en el que *r* es el radio de la base y *h* su altura. Al envasar 100 cm^3 de líquido en un cono de 12 cm de altura, quedan sin envasar 21,46 cm^3. ¿Cuál es el radio del cono?

A. 1,5 cm **B.** 2,5 cm

C. 3,5 cm **D.** 4,5 cm

Tabla de respuestas

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A
B	B	B	B	B	B	B	B	B	B	B	B	B	B	B	B
C	C	C	C	C	C	C	C	C	C	C	C	C	C	C	C
D	D	D	D	D	D	D	D	D	D	D	D	D	D	D	D

Construyendo la Cultura del Buen Vivir

Aprende a elaborar un presupuesto

Un presupuesto se elabora teniendo en cuenta los ingresos y los gastos, y constituye un instrumento para anticipar y prevenir. Invertir el dinero siguiendo un presupuesto da estabilidad a la economía personal, familiar o de un negocio. Además, permite regular los gastos, evitar problemas de iliquidez o falta de dinero, realizar previsiones de gastos, ahorrar e invertir, entre otros aspectos.



1. Entiende que un presupuesto es un cálculo anticipado, en un tiempo determinado.

a. Lee los siguientes elementos conceptuales.

El cálculo anticipado de los ingresos y gastos de una actividad económica personal, familiar o de un negocio, durante un tiempo determinado, se llama presupuesto.	Elaborar un presupuesto permite establecer prioridades y organizar los recursos para conseguir un resultado deseado en determinado tiempo.	Un presupuesto incurre en déficit cuando los gastos superan a los ingresos; o, por el contrario, presenta superávit cuando los ingresos superan a los gastos.

b. Simula el presupuesto del mes entrante de la familia Bolívar que pertenece a clase media y está conformada por dos padres y dos hijos en edad escolar. Ten presente que en un presupuesto se registra el dinero que ingresa y la forma en que se invertirá.

Presupuesto mensual de la familia Bolívar $			
Detalle	**$ Ingreso**	**Detalle**	**$ Egreso o gasto**
Salario del papá	$	Cuota de la casa	$
Ganancia del negocio de la mamá	$	Facturas de los servicios residenciales	$
Renta por arriendo de la bodega	$	Alimentación	$
	$	Cuota del carro	$
	$	Transporte	$
	$	Pensión del colegio	$
	$	Planes de atención médica	$
	$	Varios	$
Total ingresos	$	**Total egresos**	$

c. ¿Quedó el presupuesto de la familia Bolívar en déficit o en superávit? ¿Por qué?

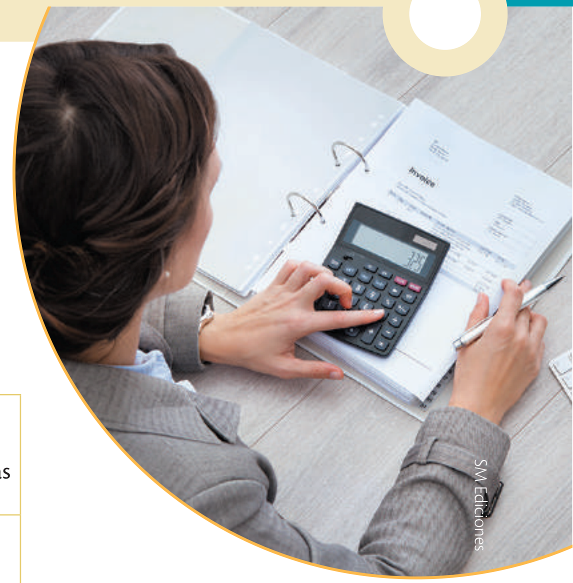
....

d. ¿En qué caso muestra un presupuesto que es posible ahorrar?

....



Tener un presupuesto permite gastar el dinero en las necesidades prioritarias con responsabilidad y ver con exactitud a dónde se va el dinero. Por otra parte, con esta información, se puede planificar y hacer ajustes para no gastar más de lo que se recibe, lo cual genera tranquilidad.



2. Haz tu propio presupuesto suponiendo que recibes $ 15 semanalmente. Si es posible, usa Excel o escribe en hojas adicionales. Comparte los resultados en grupo y concluye si estás en déficit o en superávit. Si estás con saldo en rojo, plantea una forma de reducir gastos y busca la posibilidad de ahorrar.

Trabajo en grupo

3. Reúnete con dos compañeros más y sigan las instrucciones.

a. Lean los aspectos conceptuales.

Gastos pre-operativos	Corresponde a los gastos necesarios para que la empresa empiece a funcionar, es decir, son los gastos previos. Por ejemplo, gastos en **estudio de mercado**, en el diseño del **logo** o en el pago de las **licencias de funcionamiento**.
Inversión en activos	Corresponde a la inversión para adquirir maquinaria, materia prima (cueros y telas) e insumos (pegante, suelas, cordones y remaches).
Capital de trabajo	Dinero necesario para cubrir gastos y costos, mientras se alcanza el punto de equilibrio.

Un costo es toda inversión que hace parte del proceso productivo. Por ejemplo, en una panadería, la inversión se refiere a la compra de harina y huevos o al pago del salario del panadero o del operario de maquinaria. Un **gasto** es toda inversión que no es parte del proceso productivo. Por ejemplo, pagos de arriendo, servicios públicos, transporte, refrigerios o una secretaria. En el arranque de un negocio, es muy probable que los **costos** y **gastos** sean mayores que los ingresos, entonces, hay que tener **capital de trabajo** para cubrir el arranque de la empresa. Cuando la empresa comience a funcionar y se **igualen los costos y gastos con los ingresos**, la empresa alcanzará el **punto de equilibrio**.

b. Hagan el presupuesto para el arranque de una empresa de calzado. Tengan en cuenta la información de la siguiente tabla.

Presupuesto para iniciar una empresa de calzado				
Ingresos		**Egresos**		
Ahorro	$	Materia prima	Cueros	$
Préstamo bancario	$		Telas	$
	$		Insumos varios	$
	$	Máquinas		$
	$			$
	$			$
	$	Arriendo local	Por 6 meses	$
	$	Salario dos personas	Por 6 meses	$
	$	Servicios públicos	Por 6 meses	$
	$	Taxis	Por 6 meses	$
	$	Varios	Por 6 meses	$
Total ingresos	$	**Total egresos**		$



c. Expliquen, con sus palabras, qué es el punto de equilibrio y deduzcan en qué tiempo se espera lograr este punto en la empresa de calzado.

4. Saquen una conclusión acerca de la importancia de que todo emprendedor aprenda a hacer un presupuesto.

Habilidades digitales

Presenta tus ideas por medio de una wiki

Compartir información por medio de wikis te permite presentar un tema particular de manera organizada. Cualquier persona puede contribuir con el contenido, ya sea mejorándolo o corrigiéndolo. En esta actividad aprenderás no solo a elaborar una wiki sino también a editar las desarrolladas por tus compañeros.

1 Comienza a trabajar

a. Ingresa a www.wikispaces.com, selecciona una cuenta *Education* y luego una cuenta *Students*.

b. Ingresa la información solicitada y haz clic en el ícono *Join your Classroom now!*



2 Crea tu wiki

a. Cuando estés en la página de inicio haz clic en el ícono *Create Wiki*.

b. Saldrá una ventana emergente: selecciona *Educación K-12* en *Your industry*, luego oprime *Continuar*.

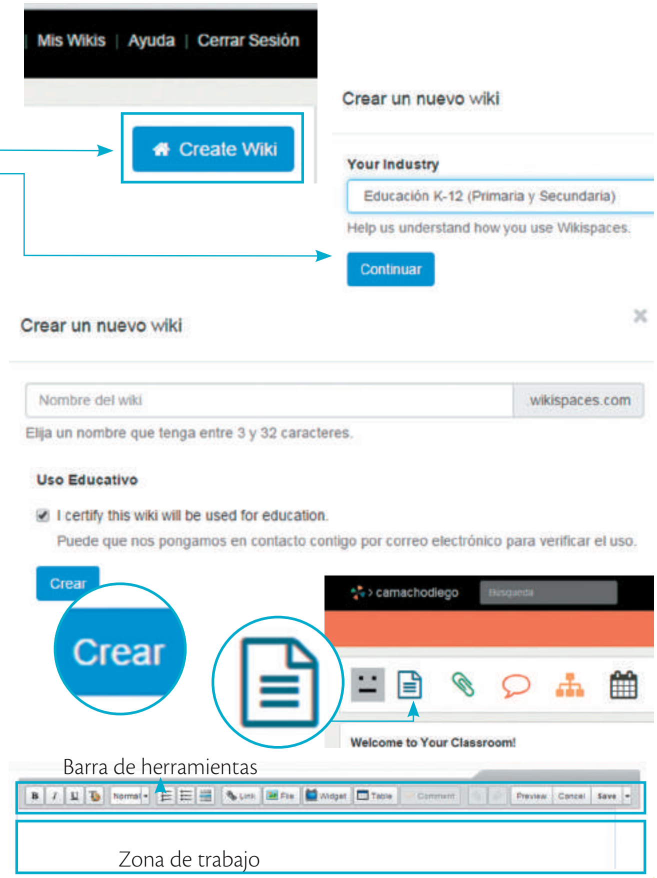
c. Completa los datos solicitados en la ventana de identificación de la wiki (el nombre corresponde a tu apellido y primer nombre juntos sin dejar espacios ni caracteres especiales).

d. Selecciona la casilla de aprobación para uso educativo y haz clic en *Crear*.

e. En la pantalla de creación selecciona el ícono de documento para iniciar una página wiki, asígnale un nombre y palabras clave. Haz clic en el ícono que parece una página de Word.

f. Identifica la barra de herramientas y la zona de trabajo en la página de creación.

g. Diseña una wiki en la que se trabajen las ecuaciones cuadráticas y sus aplicaciones; incluye imágenes y definiciones tomadas de fuentes confiables.

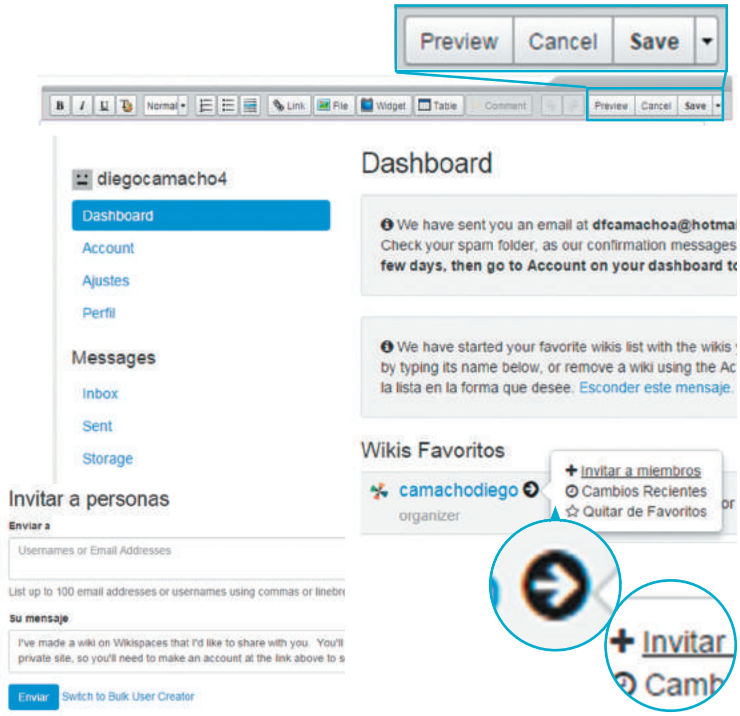


3 Publica la wiki

a. Utiliza la *barra de herramientas* para hacer cambios en la wiki. Guárdalos y previsualízalos con los botones ubicados en la parte superior derecha.

b. Al lado derecho de la página de inicio de tu recién creada wiki, ubica la flecha, oprímela para desplegar el menú y selecciona la opción *+Invitar a miembros*.

c. Escribe el correo de las personas con quienes compartirás tu wiki. Recuerda que ellas deben tener la opción de editar el contenido. Modifica el mensaje personalizado y haz clic en *Enviar*.

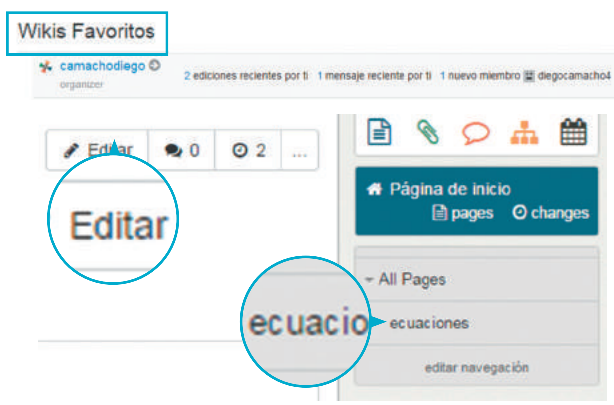


4 Edita una wiki

a. Si te han invitado a visitar una wiki, lo que tienes que hacer a continuación es ingresar con tu cuenta a www.wikispaces.com.

b. En la barra de la derecha aparecerán las páginas wiki que puedes modificar, selecciona la de tu interés y haz clic en el ícono Editar.

c. Edita la wiki con la *barra de herramientas*. Guarda los cambios que hiciste y cierra la sesión.

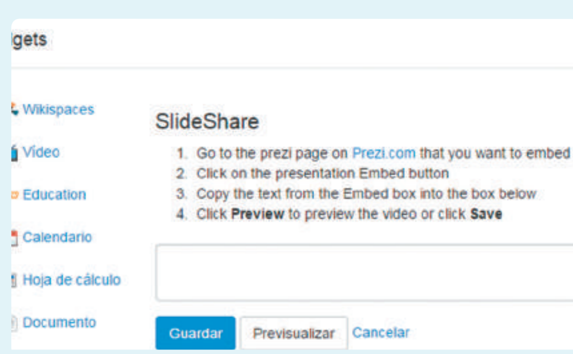


Aprende más

a. Con tu wiki en modo de edición, selecciona del menú de herramientas la opción *Widgets*.

b. Ingresa a *Prezi.com* y busca presentaciones sobre los métodos de solución de las ecuaciones cuadráticas; allí selecciona una de ellas. Ubica en la parte inferior de la presentación las herramienta para insertar y copia el código en el portapapeles.

c. Copia el texto que aparece en la casilla y pégalo en la ventana de *Widgets*, pase de diapositivas de la wiki, previsualiza y guarda tu trabajo.

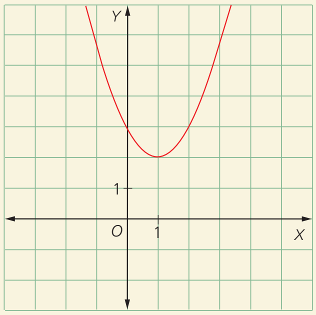


Evaluación de la unidad

Función cuadrática

Ejercitación

1. Observa la figura. Luego, responde verdadero (V) o falso (F) según corresponda.



a. El vértice de la parábola es (2, 1). ( )

b. El eje de simetría es la recta $y = 1$. ( )

c. La gráfica corresponde a una función cuadrática. ( )

d. La gráfica no intersecta el eje X. ( )

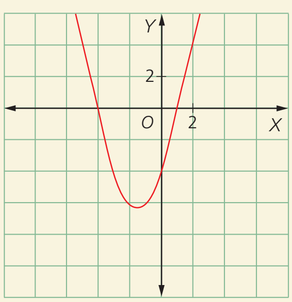
e. La curva pasa por el punto $(-3, 2)$. ( )

Gráficas de funciones cuadráticas

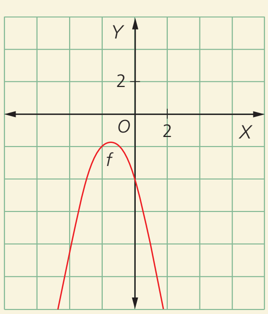
Razonamiento

2. Selecciona la parábola con vértice en $\left(\frac{3}{2}, -\frac{25}{4}\right)$ y cortes con el eje X en $x_1 = 4$ y $x_2 = -1$.

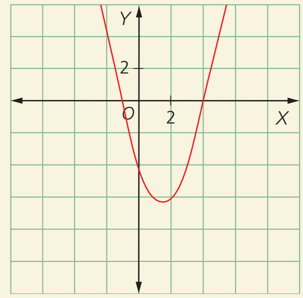
a.



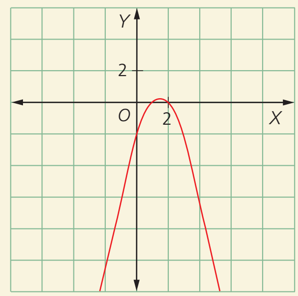
b.



c.



d.

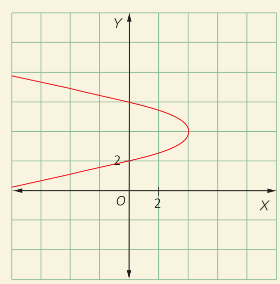


Modelación

3. Encuentra valores de k para que la gráfica de la función $f(x) = kx^2 + 3x + 2$ interseque al eje X en dos puntos.

Comunicación

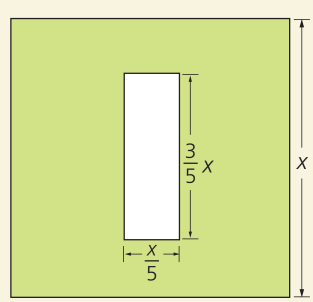
4. Valida si la gráfica corresponde a una función cuadrática. Explica tu respuesta.



Ecuaciones de segundo grado con una incógnita

Resolución de problemas

5. El área sombreada es 88 cm². ¿Cuál es el valor de x?



6. Halla dos números enteros tales que su suma sea 7 y su producto, 450.

Indicadores de logro:
- Reconoce cuándo un problema puede ser modelado utilizando una función cuadrática y lo resuelve.
- Resuelve problemas que involucren ecuaciones de segundo grado y la aplicación de las propiedades de las raíces de la ecuación de segundo grado, juzga la validez de las soluciones obtenidas en el contexto del problema.
- Analiza la función potencia.

Resolución de ecuaciones de segundo grado completando un trinomio cuadrado perfecto

Modelación

7. Identifica cuáles de las siguientes expresiones pueden resolverse mediante el método de completar un trinomio cuadrado perfecto.

a. $x^2 + \frac{2}{3}x + 1 = 0$

b. $x^2 + 4x + 2 = 0$

c. $2x^2 - 3x = -4$

d. $4x^2 - \frac{2}{5}x + \frac{7}{3} = 0$

e. $\frac{1}{2}x^2 + 5x = -\frac{1}{3}$

f. $2x^2 - 8x + \frac{1}{5} = 0$

Fórmula general para resolver una ecuación de segundo grado

Ejercitación

8. Determina si cada afirmación es verdadera (V) o falsa (F), según corresponda.

a. La gráfica de la función $2x^2 - 2x + 12$ no intersecta al eje X porque su discriminante es menor que cero. ( )

b. La ecuación $2x^3 - 4x^2 + 2x = 0$ no puede resolverse. ( )

c. Toda ecuación de segundo grado posee una o dos raíces reales. ( )

d. El número de soluciones de una ecuación cuadrática siempre será menor o igual que 2. ( )

e. La solución de la expresión $\sqrt{x^2 - 1} = 0$ no es un número real. ( )

Comunicación

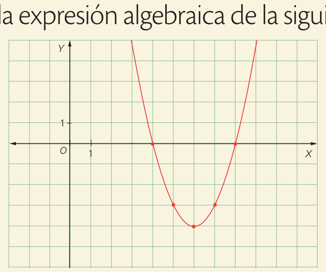
9. Explica si es posible plantear una función cuadrática que posea una raíz real y una raíz compleja.

Razonamiento

10. Establece los valores de k para que la gráfica de la expresión $3x^2 + 3x - k$ presente un intersecto con el eje X.

Modelación

11. Identifica la expresión algebraica de la siguiente parábola.

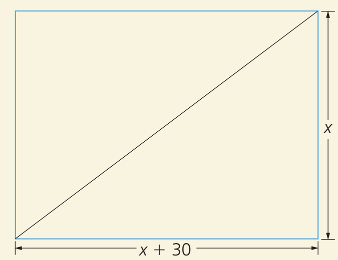


Aplicaciones de la ecuación de segundo grado

Resolución de problemas

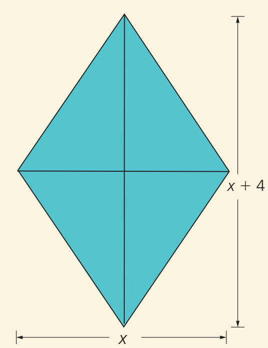
12. Una caja de 18 cm de altura, tiene una base rectangular tal que el largo excede al ancho en 7 cm. Si el volumen de la caja es 14 400 cm^3, ¿cuáles son las dimensiones de la base rectangular?

13. Calcula la longitud de los lados del rectángulo si su diagonal mide 150 cm.



14. Calcula el radio de un cono que tiene un volumen de 78,54 cm^3 y una altura de 12 cm. La fórmula para encontrar el volumen de un cono es $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$.

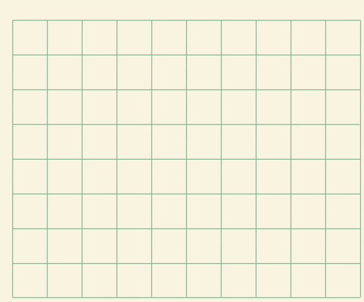
15. Halla la cantidad de alambre que se requiere para cercar el terreno dibujado en el plano, si su área es igual a 48 m^2.



Función potencia

Razonamiento

16. Dada la función potencia $f(x) = -4x^2$ grafícala y determina el intervalo donde es decreciente.



5 Razones trigonométricas

BLOQUE

Geometría y medida

Desde la Antigüedad, los seres humanos han construido complejos instrumentos para medir ángulos; esto se ha hecho con el fin de responder al interés de conocer de forma segura y permanente la posición de lugares geográficos en el planeta Tierra y de los cuerpos en el Universo.

- Haz una investigación sobre algunos de los instrumentos utilizados en la topografía para determinar distancias en un terreno al que no se tiene fácil acceso.



Cultura del Buen Vivir

La cooperación

Si los integrantes de una comunidad quieren alcanzar un objetivo común, la mejor manera de lograrlo es mediante la cooperación. Muchos logros sociales han sido posibles gracias a este importante valor.

- ¿Crees que la cooperación es necesaria en tu salón de clase? ¿Por qué?

Aprenderás...

- Razones trigonométricas en triángulos rectángulos
- Razones trigonométricas en un triángulo cualquiera
- Resolución de triángulos rectángulos
- Problemas de cálculo de áreas y volúmenes

Resolución de problemas

Recursos digitales

LTIC

AI

E



SM Ediciones

Habilidades lectoras

Una computadora de hace 2000 años

Hace más de cien años (en 1900), un extraordinario mecanismo fue encontrado por pescadores de esponjas en el fondo del mar, cerca de la isla Antikythera. El hallazgo deslumbró a los expertos en el mundo antiguo por tratarse de un mecanismo extraño y de gran complejidad.

Las investigaciones revelaron que databa del siglo I antes de Cristo, y es de resaltar que no se conoce ningún mecanismo tan sofisticado que se hubiera fabricado durante los siguientes mil años. Tras décadas de conjeturas e investigaciones, se ha determinado que estaba dedicado a los fenómenos astronómicos, funcionando como una compleja "computadora" mecánica que sigue los ciclos del sistema solar.

La máquina tiene unas treinta ruedas de bronce y esferas, y está cubierta de inscripciones astronómicas. Pudo servir para calcular la posición de ciertas estrellas, al menos del Sol y la Luna, y quizá predecir fenómenos astronómicos.

Nuevos análisis y la reconstrucción del instrumento, con 72 engranajes, sugieren que podría haber mostrado los movimientos relativos a los cinco planetas conocidos en ese tiempo.

Más allá de plantear el problema del origen exacto del artefacto, su descubrimiento ha servido para replantear gran parte de la historia antigua, ya que su sola existencia pone en evidencia la presencia de una tecnología que no se creía posible antes de la Edad Media, con la que los investigadores de ese tiempo fueron capaces de construir engranajes tan precisos con conocimientos astronómicos exactos.

Sm Ediciones. (2016). Colombia. Matemática 10.

Actividades

Interpreta

1. ¿Qué características del artefacto encontrado en la isla de Antikythera han causado el asombro de los científicos?

Argumenta

2. Según las investigaciones, ¿qué función cumplía el artefacto?

Propón

3. Escribe una conjetura acerca de cómo pudo ser posible la construcción de un artefacto tan sofisticado en aquella época.

1 Medidas de ángulos

Explora

Observa la Figura 1

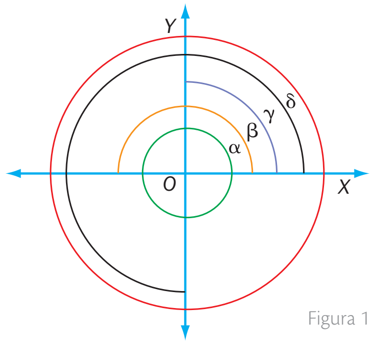


Figura 1

- Halla la medida de los ángulos centrales marcados en la figura.

1.1 El grado sexagesimal

Para hallar la medida de los ángulos centrales α, β, γ y δ, se fija como primer lado de los ángulos el semieje positivo de las abscisas.

Si el sentido de giro es contrario al de las agujas del reloj, la medida de los ángulos es un número positivo; si el sentido es el mismo de las manecillas, es un número negativo.

El **grado sexagesimal** es la medida de cada uno de los ángulos que resultan al dividir el ángulo recto en 90 partes iguales. Su símbolo es °.

Un grado se divide en 60 **minutos**: $1° = 60'$.

Un minuto se divide en 60 **segundos**: $1' = 60''$.

Ejemplo 1

Para expresar el ángulo de 7 225° como la suma de un número entero de vueltas y un ángulo menor que 360°, se divide por 360°, de modo que el cociente es el número de vueltas y el residuo es el ángulo buscado.

$$7\,225° = 20 \cdot 360° + 25°$$

1.2 El radián

El **radián** es la medida del ángulo central de una circunferencia cuyo arco tiene la misma longitud que el radio. Su símbolo es **rad**.

Como el ángulo de un giro completo abarca toda la circunferencia, y la longitud de una circunferencia con radio r es $2\pi r$, este ángulo mide 2π rad. Por lo tanto, se tiene la equivalencia:

$$360° = 2\pi \text{ rad}$$

$$\Rightarrow 1 \text{ rad} = 57° \, 17' \, 44''$$

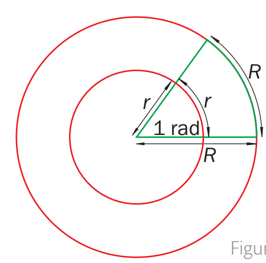


Figura 2

Ten en cuenta

Un ángulo central tiene su vértice en el centro de una circunferencia y sus lados son dos radios de la misma.

El radián es independiente del radio de la circunferencia que se considere, ya que todos los sectores circulares determinados por un mismo ángulo son semejantes entre sí (Figura 2).

Los ángulos que determinan arcos de mayor longitud que la de la circunferencia pueden expresarse como la suma de un número entero de vueltas y un ángulo menor que 360° o 2π radianes.

1.3 Conversión entre unidades de medida de ángulos

Para hacer conversiones de medidas de ángulos entre los sistemas sexagesimal y de radianes, se parte de la equivalencia estudiada anteriormente ($360° = 2\pi$ rad).

Ejemplo 2

Para expresar 125° en radianes, se plantea la siguiente regla de tres:

$$\frac{2\pi \text{ rad}}{360°} = \frac{x}{125°} \Rightarrow x = \frac{125° \cdot 2\pi \text{ rad}}{360°} = \frac{25\pi}{36} \text{ rad}$$

Destreza con criterios de desempeño: Definir e identificar medidas de ángulos en la solución de ejercicios y problemas.

Actividades resueltas

Ejercitación

1 Expresa en radianes el ángulo de 155°.

Solución:

Al utilizar la equivalencia entre grados y radianes, se obtiene:

$$\frac{\pi \text{ rad}}{180°} = \frac{x}{155°} \Rightarrow x = \frac{155° \cdot \pi \text{ rad}}{180°} = \frac{31\pi}{36} \text{ rad}$$

2 Expresa en grados el ángulo de 2,4 rad.

Solución:

Se plantea una regla de tres simple: $\frac{\pi \text{ rad}}{180°} = \frac{2{,}4 \text{ rad}}{x}$

Entonces: $x = \frac{180° \cdot 2{,}4 \text{ rad}}{\pi \text{ rad}}$

$$x = \frac{432°}{\pi} = 137{,}5099°$$

Ten en cuenta

$$\frac{180°}{\pi \text{ rad}} = \frac{x}{1 \text{ rad}}$$

Desarrolla tus destrezas

Comunicación

3 Indica a qué ángulo menor que 360° equivalen los ángulos que se indican a continuación.

a. 720° b. 1 050° c. 990°
d. 840° e. 600° f. 1 260°

Ejercitación

4 Indica la medida en radianes de los siguientes ángulos.

a. 0° b. −45° c. −60°
d. 120° e. 30° f. −240°
g. 90° h. −270° i. 135°
j. −300° k. 36° l. −20°
m. 216° n. −160° ñ. 324°

5 Expresa la medida en radianes del ángulo α, menor que 360°, al que equivalen estos ángulos.

a. 480° b. −1 235° c. 930° d. 1 440°

6 Expresa en grados los siguientes ángulos.

a. $-\frac{\pi}{6}$ rad b. 0,8 rad c. $\frac{3\pi}{4}$ rad
d. -3π rad e. 4π rad f. $-\frac{9\pi}{4}$ rad
g. $-\frac{7\pi}{9}$ rad h. $\frac{13\pi}{6}$ rad i. $-\frac{5\pi}{12}$ rad
j. $-\frac{11\pi}{5}$ rad k. $-\frac{\pi}{5}$ l. $\frac{5\pi}{6}$

Comunicación

7 Calcula el ángulo equivalente, en sentido positivo, a cada uno de los siguientes ángulos. Utiliza la misma unidad de medida en que vienen dados.

a. −330° b. $-\frac{3\pi}{4}$ rad
c. −120° d. $-\frac{\pi}{2}$ rad

Razonamiento

8 Clasifica cada afirmación como verdadera (V) o falsa (F), sea un ángulo β en posición normal.

a. Su lado final debe estar en el primer cuadrante.
b. Su rotación debe ser en sentido contrario al de las manecillas del reloj.
c. Su vértice debe estar sobre el eje positivo de las abscisas.
d. Su lado inicial debe coincidir con el eje positivo de las abscisas.

Resolución de problemas

PAI Proyecto de Activación de las Inteligencias

9 Dos ángulos a y b son complementarios si la suma de sus medidas es igual a la medida de un ángulo recto, es decir, $a + b = 90°$. ¿Cuál es la medida, en radianes y en grados, del ángulo complementario en cada caso?

a. 15° b. 38°
c. $\frac{5\pi}{12}$ d. $\frac{13\pi}{36}$

2 Razones trigonométricas en triángulos rectángulos

Explora

Observa la Figura 1.

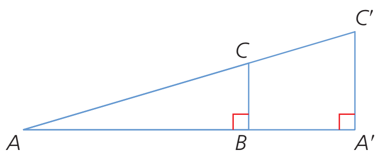


Figura 1

- ¿Cuál es la relación entre el valor de las razones de las longitudes de los lados de los triángulos?

En la figura se observa que $\triangle ABC$ y $\triangle AA'C'$ comparten el ángulo A, y que los ángulos B y A' son congruentes por ser ángulos rectos. Por tanto, por el criterio Ángulo-Ángulo se puede afirmar que $\triangle ABC \sim \triangle AA'C'$. En consecuencia, se tienen estas relaciones:

$$\frac{BC}{AC} = \frac{A'C'}{AC'} \qquad \frac{AB}{AC} = \frac{AA'}{AC'} \qquad \frac{BC}{AB} = \frac{A'C'}{AA'}$$

A estas razones iguales se les denominan seno del ángulo A, coseno del ángulo A y tangente del ángulo A, respectivamente.

Las razones que se pueden establecer entre las longitudes de los lados de un triángulo rectángulo reciben el nombre de **razones trigonométricas**.

De acuerdo con el planteamiento anterior, las **razones trigonométricas** de un ángulo agudo α en un triángulo rectángulo son:

$$\textbf{seno de } \alpha = \frac{\text{longitud del cateto opuesto a } \alpha}{\text{longitud de la hipotenusa}}$$

$$\textbf{coseno de } \alpha = \frac{\text{longitud del cateto adyacente a } \alpha}{\text{longitud de la hipotenusa}}$$

$$\textbf{tangente de } \alpha = \frac{\text{longitud del cateto opuesto a } \alpha}{\text{longitud del cateto adyacente a } \alpha}$$

$$\operatorname{sen}\alpha = \frac{a}{c} \qquad \cos\alpha = \frac{b}{c} \qquad \tan\alpha = \frac{a}{b}$$

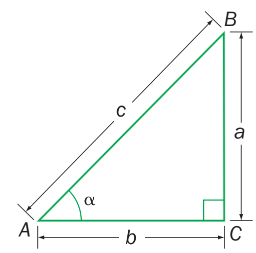


Figura 2

Ten en cuenta

Dos triángulos son semejantes si los ángulos correspondientes son congruentes y los lados correspondientes son proporcionales.

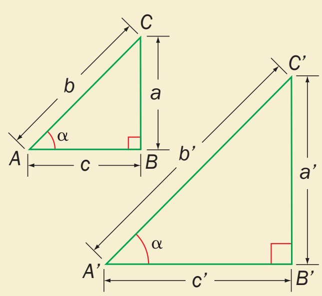


Figura 3

$\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$ si $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'}$ y

$\measuredangle A \cong \measuredangle A'$, $\measuredangle B \cong \measuredangle B'$ y $\measuredangle C \cong \measuredangle C'$.

Ejemplo 1

Los triángulos ABC y $A'B'C'$ de la Figura 4 son semejantes, ya que son triángulos rectángulos y tienen los ángulos α y α congruentes; por consiguiente, los lados correspondientes son proporcionales.

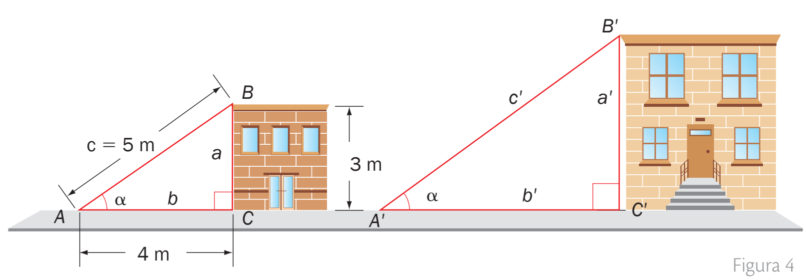


Figura 4

Las razones son:

$\frac{a}{c} = \frac{a'}{c'} = \frac{3}{5}$. Esta razón se denomina **seno** del ángulo α.

$\frac{b}{c} = \frac{b'}{c'} = \frac{4}{5}$. A esta razón se le llama **coseno** del ángulo α.

$\frac{a}{b} = \frac{a'}{b'} = \frac{3}{4}$. Esta razón es la **tangente** del ángulo α.

Destreza con criterios de desempeño: Definir e identificar las razones trigonométricas en el triángulo rectángulo (seno, coseno, tangente) para resolver numéricamente triángulos rectángulos.

Actividad resuelta

Razonamiento

1 Halla las razones trigonométricas del ángulo agudo de mayor amplitud de un triángulo rectángulo cuyos lados miden 8 cm, 15 cm y 17 cm, respectivamente.

Solución:

El cateto opuesto al ángulo agudo de mayor amplitud es el que mide 15 cm (Figura 5). De esta forma:

$$\operatorname{sen}\alpha = \frac{\text{Cateto opuesto}}{\text{Hipotenusa}} = \frac{15}{17} \qquad \cos\alpha = \frac{\text{Cateto adyacente}}{\text{Hipotenusa}} = \frac{8}{17}$$

$$\tan\alpha = \frac{\text{Cateto opuesto}}{\text{Cateto adyacente}} = \frac{15}{8}$$

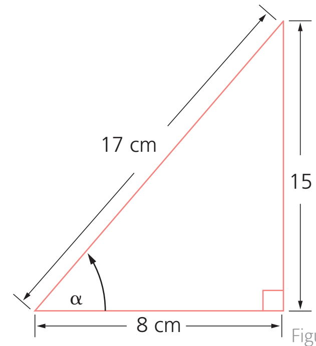


Figura 5

Desarrolla tus destrezas

Ejercitación

2 Halla las razones trigonométricas del ángulo α en cada triángulo rectángulo.

a.

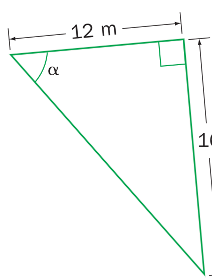


Figura 7

b.

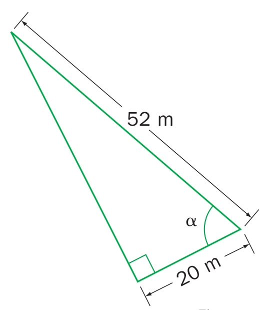


Figura 8

3 Calcula las razones trigonométricas del ángulo agudo de mayor amplitud de la Figura 9.

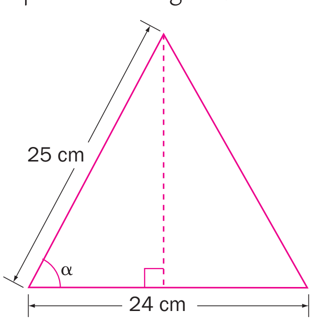


Figura 9

Comunicación

4 Halla las razones trigonométricas de los ángulos agudos de un triángulo rectángulo si se sabe que la hipotenusa y uno de sus catetos miden 13 cm y 5 cm, respectivamente.

5 Describe tres formas distintas de hallar la hipotenusa en un triángulo rectángulo cuando se conocen un cateto y un ángulo.

Razonamiento

6 Escribe, en función de *m*, *n* y *p*, el seno, el coseno y la tangente del ángulo α de cada uno de los triángulos rectángulos que se muestran a continuación.

a.

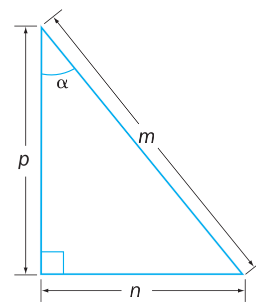


Figura 10

b.

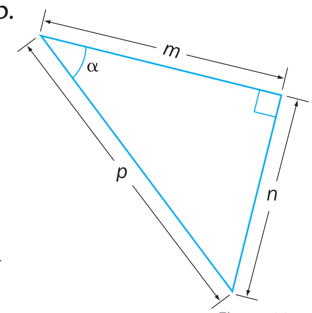


Figura 11

Ejercitación

7 Calcula las razones trigonométricas del ángulo agudo de menor amplitud (Figura 12).

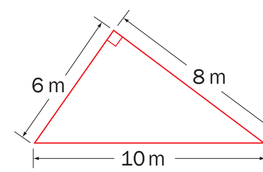


Figura 12

Comunicación

8 Discute con un compañero: ¿Qué relación existe entre las tangentes de los dos ángulos agudos de un triángulo rectángulo?

Resolución de problemas

9 La hipotenusa y los catetos de un triángulo rectángulo miden 20 dm, 16 dm y 12 dm, respectivamente.

¿Cuáles son las razones trigonométricas del ángulo agudo de menor amplitud del triángulo?

3 Razones trigonométricas de ángulos especiales

Explora

En un triángulo rectángulo isósceles, los dos catetos tienen la misma longitud y los dos ángulos agudos son congruentes e iguales a 45º (Figura 1).

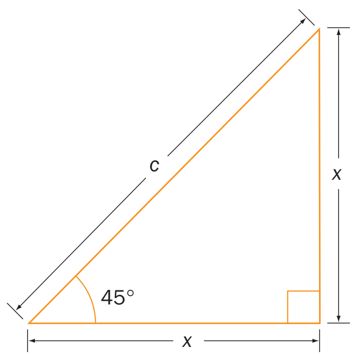


Figura 1

- Calcula los valores de sen45°, cos45° y tan45°.

3.1 Razones trigonométricas del ángulo de 45°

Por el teorema de Pitágoras, la hipotenusa del triángulo rectángulo isósceles mide:

$$c = \sqrt{x^2 + x^2} = \sqrt{2x^2} = x\sqrt{2}$$

De acuerdo con las definiciones de las razones trigonométricas, para el ángulo de 45° se tiene que:

$$\text{sen}45° = \frac{x}{x\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2};\ \cos45° = \frac{x}{x\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2};\ \tan45° = \frac{x}{x} = 1$$

A partir de la definición de las razones trigonométricas en un triángulo rectángulo, es posible calcular los valores correspondientes a los **ángulos especiales** tales como **45º**, **30º** y **60º**.

3.2 Razones trigonométricas de los ángulos de 30° y 60°

La altura de un triángulo equilátero lo divide en dos triángulos rectángulos cuyos catetos menores corresponden a la mitad del lado, como se muestra en la Figura 2.

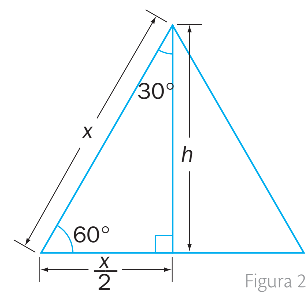


Figura 2

La medida de la altura es:

$$h = \sqrt{x^2 - \frac{x^2}{4}} = \sqrt{\frac{3x^2}{4}} = \frac{x\sqrt{3}}{2}$$

Así, las razones trigonométricas del ángulo de 60° son:

$$\text{sen}60° = \frac{\frac{x\sqrt{3}}{2}}{x} = \frac{\sqrt{3}}{2};\ \cos60° = \frac{\frac{x}{2}}{x} = \frac{1}{2};\ \tan60° = \frac{\frac{x\sqrt{3}}{2}}{\frac{x}{2}} = \sqrt{3}$$

Por su parte, las razones trigonométricas del ángulo de 30° son:

$$\text{sen}30° = \frac{\frac{x}{2}}{x} = \frac{1}{2};\ \cos30° = \frac{\frac{x\sqrt{3}}{2}}{x} = \frac{\sqrt{3}}{2};\ \tan30° = \frac{\frac{x}{2}}{\frac{x\sqrt{3}}{2}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$



Figura 3

Ejemplo 1

Para calcular la altura del triángulo de la Figura 3, si se sabe que uno de los ángulos agudos mide el doble que el otro, se procede como sigue.

Sea α la medida del ángulo agudo de menor amplitud y h la altura del triángulo, entonces:

$$90° + \alpha + 2\alpha = 180° \Rightarrow \alpha = 30°$$

$$\cos30° = \frac{h}{5,5} \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{h}{5,5} \Rightarrow h = 4,76 \text{ m}$$

Destreza con criterios de desempeño: Definir e identificar razones trigonométricas de ángulos especiales (seno, coseno, tangente) para resolver numéricamente triángulos rectángulos.

Actividad resuelta

Resolución de problemas

1 Un faro de 45 m de altura ilumina un barco con un rayo de luz que forma un ángulo de 30° con la horizontal (Figura 4). ¿A qué distancia se encuentra el barco del faro?

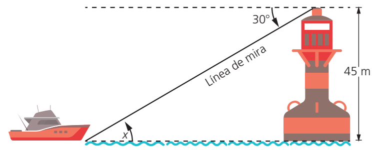


Figura 4

Solución:

Sea x la distancia del barco al faro, se tiene que:

$$\tan 60° = \frac{x}{45} \Rightarrow x = 45 \cdot \tan 60°$$
$$= 45 \cdot \sqrt{3}$$
$$= 77{,}94 \text{ m}$$

Por tanto, el barco se encuentra a 77,94 m del faro.

Ten en cuenta

La civilización egipcia fue una de las primeras en aplicar la trigonometría en sus construcciones arquitectónicas.

Desarrolla tus destrezas

Ejercitación

2 Completa la Tabla 1.

α	$\operatorname{sen}\alpha$	$\cos\alpha$	$\tan\alpha$
		$\frac{\sqrt{2}}{2}$	
			$\sqrt{3}$
30°			

Tabla 1

3 Determina la medida de la altura del triángulo ABC de la Figura 5.

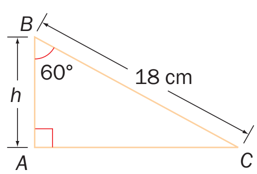


Figura 5

Comunicación

4 Contesta estas preguntas.

a. Si el $\operatorname{sen}\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$, ¿cuál es la medida del ángulo α?

b. Si el $\operatorname{sen}\alpha = \frac{1}{2}$, ¿de qué ángulo se trata?

c. Si la $\tan\beta = \frac{\sqrt{3}}{3}$, ¿cuánto mide el ángulo β?

5 Calcula la medida de los ángulos del triángulo de la Figura 6.

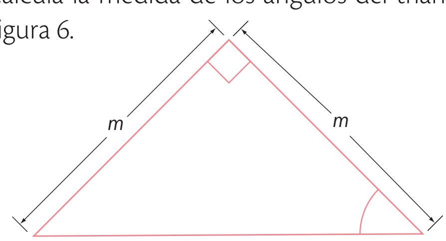


Figura 6

Razonamiento

6 Indica cuál es la relación entre cada par de valores.

a. sen60° y cos30°

b. cos60° y sen30°

c. tan60° y tan30°

Ejercitación

7 Calcula el valor de cada expresión.

a. $\operatorname{sen}45° + \operatorname{sen}60°$

b. $\operatorname{sen}30° + \cos 60°$

c. $\tan 45° - (\cos 60° + \operatorname{sen}30°)$

d. $\tan 30° \cdot \tan 60° \cdot \tan 45°$

e. $\operatorname{sen}45° + \frac{1}{2}\cos 45°$

f. $3\cos 60° - 2\operatorname{sen}30°$

g. $\frac{\tan 30° + \tan 60°}{1 + \tan 30° \cdot \tan 60°}$

Resolución de problemas

PAI Proyecto de Activación de las Inteligencias

8 En un triángulo rectángulo ABC, $\measuredangle A = 45° = \measuredangle C$. Si la hipotenusa mide 10 cm, ¿cuánto mide cada cateto?

9 ¿Qué distancia separa a dos carros A y B que se desplazan sobre una vía, uno al encuentro del otro, si un hombre con binoculares, situado a 200 m de la vía, observa al auto A con un ángulo de 30° y al auto B con un ángulo de 45°?

4 Relaciones entre las razones trigonométricas

Explora

Observa la Figura 1.

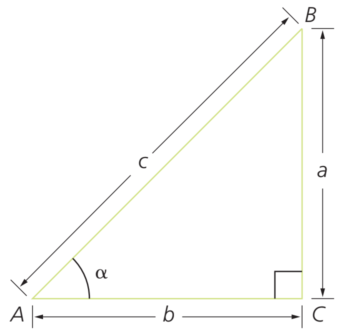


Figura 1

- Haz uso del teorema de Pitágoras para demostrar las siguientes relaciones trigonométricas:

$\text{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$

$\tan\alpha = \dfrac{\text{sen}\alpha}{\cos\alpha}$

$\tan^2\alpha + 1 = \dfrac{1}{\cos^2\alpha}$

Según la información representada en la Figura 1, por el teorema de Pitágoras se tiene que $a^2 + b^2 = c^2$. Así, dividiendo por c^2, se obtiene:

$$\frac{a^2}{c^2} + \frac{b^2}{c^2} = \frac{c^2}{c^2}, \text{ o}$$

$$\left(\frac{a}{c}\right)^2 + \left(\frac{b}{c}\right)^2 = 1$$

Como $\text{sen}\alpha = \dfrac{a}{c}$ y $\cos\alpha = \dfrac{b}{c}$, entonces:

$$(\text{sen}\alpha)^2 + (\cos\alpha)^2 = 1$$

La anterior expresión es equivalente a la igualdad:

$$\text{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$$

Esta relación es la **identidad fundamental de la trigonometría**.

Asimismo, se verifica que:

$$\frac{\textbf{sen}\boldsymbol{\alpha}}{\textbf{cos}\boldsymbol{\alpha}} = \frac{\frac{a}{c}}{\frac{b}{c}} = \frac{a}{b} = \textbf{tan}\boldsymbol{\alpha}$$

Si se dividen los dos miembros de esta ecuación por $\cos^2\alpha$, se obtiene:

$$\frac{\text{sen}^2\alpha}{\cos^2\alpha} + \frac{\cos^2\alpha}{\cos^2\alpha} = \frac{1}{\cos^2\alpha} \Rightarrow \mathbf{tan^2\alpha + 1 = \frac{1}{cos^2\alpha}}$$

Para cualquier ángulo agudo α de un triángulo rectángulo se verifica que:

$$\text{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$$

$$\tan\alpha = \frac{\text{sen}\alpha}{\cos\alpha} \qquad \tan^2\alpha + 1 = \frac{1}{\cos^2\alpha}$$

Ten en cuenta

$(\text{sen}\alpha)^2 = \text{sen}^2\alpha$

$(\text{sen}\alpha)^2 \neq \text{sen}\alpha^2$

Ejemplo 1

Para calcular los valores del coseno y la tangente de un ángulo agudo α, si se conoce que $\text{sen}\alpha = 0{,}6$, se puede utilizar la identidad fundamental como sigue.

$$\text{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = 1 \Rightarrow (0{,}6)^2 + \cos^2\alpha = 1 \Rightarrow \cos^2\alpha = 1 - 0{,}36$$
$$\Rightarrow \cos\alpha = \sqrt{0{,}64} \Rightarrow \cos\alpha = 0{,}8$$

Por su parte:

$$\tan\alpha = \frac{\text{sen}\alpha}{\cos\alpha} \Rightarrow \tan\alpha = \frac{0{,}6}{0{,}8} \Rightarrow \tan\alpha = 0{,}75$$

Ejemplo 2

Se puede calcular el valor de la tangente de un ángulo agudo α, si se sabe que el valor del coseno es 0,5, como se muestra a continuación.

$$\tan^2\alpha + 1 = \frac{1}{\cos^2\alpha} \Rightarrow \tan^2\alpha + 1 = \frac{1}{(0{,}5)^2}$$
$$\Rightarrow \tan^2\alpha = \frac{1}{0{,}25} - 1$$
$$\Rightarrow \tan^2\alpha = 3$$
$$\Rightarrow \tan\alpha = \sqrt{3}$$

Destreza con criterios de desempeño: Definir e identificar las relaciones entre las razones trigonométricas (seno, coseno, tangente) para resolver numéricamente triángulos rectángulos.

Actividad resuelta

Ejercitación

1 Calcula el valor del seno y la tangente de un ángulo agudo α, si el coseno vale $\frac{\sqrt{2}}{3}$. Apóyate en la información de la Figura 2.

Solución:

Si se aplica la ecuación fundamental, resulta que:

$$\text{sen}^2\alpha + \left(\frac{\sqrt{2}}{3}\right)^2 = 1 \Rightarrow \text{sen}^2\alpha = \frac{7}{9} \Rightarrow \text{sen}\alpha = \frac{\sqrt{7}}{3}$$

Por su parte, $\tan\alpha = \dfrac{\text{sen}\alpha}{\cos\alpha} = \dfrac{\frac{\sqrt{7}}{3}}{\frac{\sqrt{2}}{3}} = \dfrac{\sqrt{7}}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{14}}{2}$

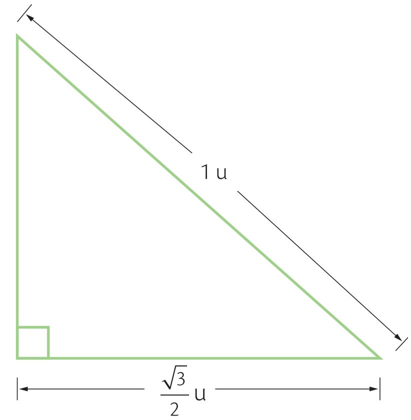


Figura 2

Desarrolla tus destrezas

Ejercitación

2 Calcula, en cada caso, las restantes razones trigonométricas de un ángulo agudo si se conoce que:

a. $\text{sen}\alpha = \frac{\sqrt{3}}{5}$

b. $\cos\alpha = \frac{1}{3}$

c. $\tan\alpha = \sqrt{5}$

d. $\cos\alpha = \frac{4}{5}$

e. $\tan\alpha = 5$

f. $\cos\alpha = 0{,}8$

Comunicación

3 Completa la Tabla 1 con valores aproximados.

senα	0,92		
cosα			0,12
tanα		0,75	

Tabla 1

4 Calcula el valor exacto (utilizando radicales) de las razones trigonométricas que faltan en la Tabla 2 ($\alpha < 90°$).

senα	$\frac{1}{3}$		
cosα		$\frac{\sqrt{2}}{3}$	
tanα			2

Tabla 2

Razonamiento

5 Dibuja un ángulo menor que 180° cuyo coseno sea $-\frac{1}{2}$ y halla las restantes razones trigonométricas.

6 Aplica la identidad fundamental de la trigonometría y simplifica las expresiones.

a. $(\text{sen}\alpha + 1)(\text{sen}\alpha - 1)$

b. $\cos^2\alpha\,(\tan^2\alpha + 1)$

c. $(1 - \cos\alpha)(1 + \cos\alpha)$

d. $\tan\alpha \cdot \dfrac{1}{\cos\alpha}\left(\dfrac{1}{\text{sen}\alpha} - \text{sen}\alpha\right)$

7 Demuestra las siguientes igualdades trigonométricas.

a. $\tan^2\alpha \cdot (1 - \text{sen}^2\alpha) = \text{sen}^2\alpha$

b. $\dfrac{\text{sen}\alpha \cdot \cos\alpha}{\tan\alpha} = 1 - \text{sen}^2\alpha$

c. $(1 + \tan^2\alpha) \cdot \cos^2\alpha = 1$

Resolución de problemas

8 Una identidad trigonométrica es una igualdad entre expresiones trigonométricas (senα, cosα y tanα) y es válida para todos los valores del ángulo. Demuestra que la expresión $2\text{sen}\alpha\cos\alpha - \text{sen}\alpha = 0$ no es una identidad.

9 Una señal de peligro en una carretera nos advierte que la pendiente es del 12%. ¿Qué ángulo forma ese tramo de carretera con la horizontal? ¿Cuántos metros se habrán descendido después de recorrer 7 km por esa carretera?

5 Razones trigonométricas de un ángulo cualquiera

Explora

El ángulo α de la Figura 1 está situado en posición normal, es decir, su vértice coincide con el origen del plano cartesiano.

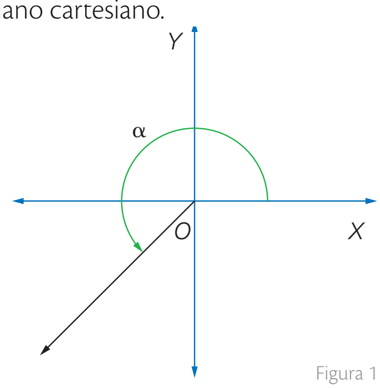


Figura 1

- Si se sabe que $\cos\alpha = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$, ¿cuáles son los valores de **senα** y **tanα**?

5.1 Circunferencia goniométrica

Las definiciones de seno, coseno y tangente se pueden extender a un ángulo cualquiera haciendo uso de un sistema de coordenadas cartesianas y una circunferencia de centro O y radio $r = 1$ denominada **circunferencia goniométrica**.

Cada ángulo α determina un punto $P(x, y)$ sobre la circunferencia goniométrica. El radio y las coordenadas de este punto forman un triángulo rectángulo, tal que:

$$\operatorname{sen}\alpha = \frac{y}{1} = y \qquad \cos\alpha = \frac{x}{1} = x \qquad \tan\alpha = \frac{y}{x}\text{, con } x \neq 0$$

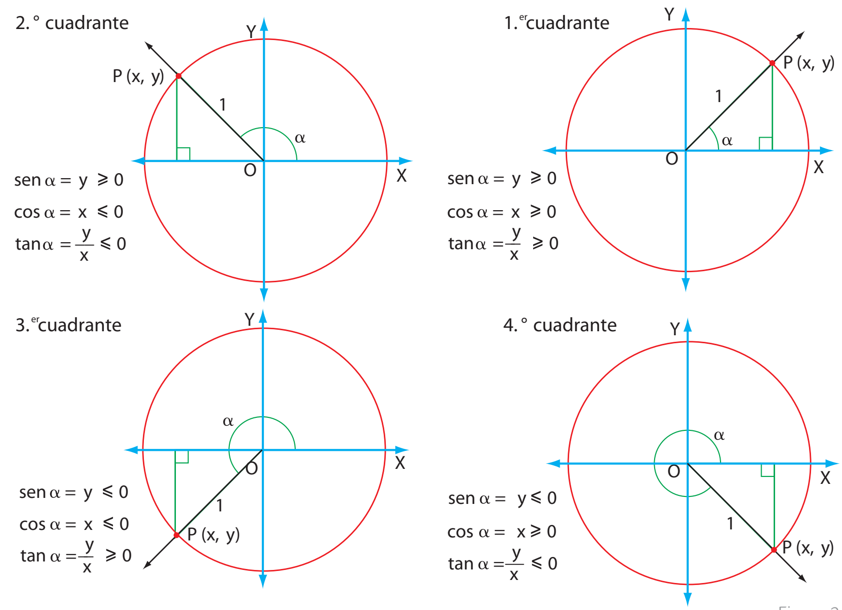


Figura 2

Así, para calcular los valores senα y tanα para el ángulo α de la Figura 1, se puede hacer el siguiente razonamiento.

- Como α pertenece al tercer cuadrante, entonces $\operatorname{sen}\alpha \leqslant 0$ y $\tan\alpha \geqslant 0$. Al aplicar la identidad fundamental, se tiene que:

$$\operatorname{sen}^2\alpha + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = 1 \Rightarrow \operatorname{sen}^2\alpha = 1 - \frac{2}{4} \Rightarrow \operatorname{sen}^2\alpha = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \operatorname{sen}\alpha = \pm\frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \operatorname{sen}\alpha = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

- Por otra parte:

$$\tan\alpha = \frac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha} \Rightarrow \tan\alpha = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}}$$

$$\Rightarrow \tan\alpha = 1$$

Las razones trigonométricas no dependen del radio de la circunferencia, ya que los triángulos rectángulos determinados por el ángulo α son semejantes entre sí. Además, como $r = 1$, se cumple que:

$$|\operatorname{sen}\alpha| \leqslant 1 \qquad |\cos\alpha| \leqslant 1$$

Ten en cuenta

$\operatorname{sen} 90° = 1$

$\cos 90° = 0$

tan 90° no existe (Figura 3).

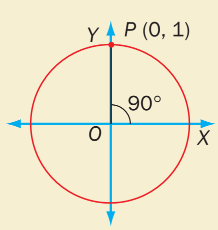


Figura 3

Destreza con criterios de desempeño: Determinar las razones trigonométricas de un ángulo cualquiera.

5.2 Razones trigonométricas de ángulos suplementarios y de ángulos que difieren en 180º

Ángulos suplementarios: α y $180° - \alpha$

Los ángulos α y $180° - \alpha$ son suplementarios, por lo que:

$$\text{sen}(180° - \alpha) = \text{sen}\alpha \qquad \cos(180° - \alpha) = -\cos\alpha$$

$$\tan(180° - \alpha) = -\tan\alpha$$

Ejemplo 1

Los puntos P y P' son simétricos con respecto al eje de ordenadas (Figura 4).

$y' = y \Rightarrow \text{sen}(180° - \alpha) = \text{sen}\alpha$

$x' = -x \Rightarrow \cos(180° - \alpha) = -\cos\alpha$

$$\tan(180° - \alpha) = \frac{\text{sen}(180° - \alpha)}{\cos(180° - \alpha)} = \frac{\text{sen}\alpha}{-\cos\alpha} = -\tan\alpha$$

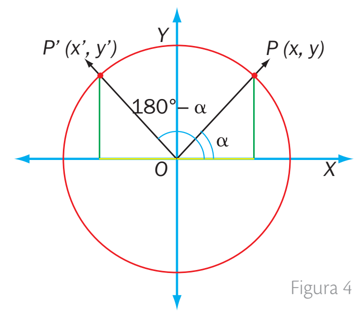


Figura 4

Ángulos que difieren en 180°: α y $180° + \alpha$

Los ángulos α y $180 + \alpha$ difieren en 180°, por lo tanto:

$$\text{sen}(180° + \alpha) = -\text{sen}\alpha \qquad \cos(180° + \alpha) = -\cos\alpha$$

$$\tan(180° + \alpha) = \tan\alpha$$

Ejemplo 2

Los puntos P y P' son simétricos con respecto al origen de coordenadas (Figura 5).

$y' = -y \Rightarrow \text{sen}(180° + \alpha) = -\text{sen}\alpha$

$x' = -x \Rightarrow \cos(180° + \alpha) = -\cos\alpha$

$$\tan(180° + \alpha) = \frac{\text{sen}(180° + \alpha)}{\cos(180° + \alpha)} = \frac{-\text{sen}\alpha}{-\cos\alpha} = \tan\alpha$$

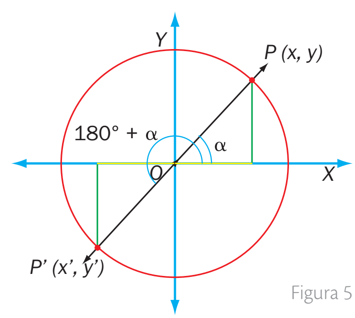


Figura 5

Ejemplo 3

- Para hallar la razones trigonométricas de 135º, se tiene en cuenta que 135º y 45º son ángulos suplementarios; es decir:

$$\text{sen}\,135° = \text{sen}(180° - 45°) = \text{sen}\,45° = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\cos 135° = \cos(180° - 45°) = -\cos 45° = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\tan 135° = \tan(180° - 45°) = -\tan 45° = -1$$

- Estas son las razones trigonométricas del ángulo 210º = 180º + 30º.

$$\text{sen}\,210° = \text{sen}(180° + 30°) = -\text{sen}\,30° = -\frac{1}{2}$$

$$\cos 210° = \cos(180° + 30°) = -\cos 30° = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\tan 210° = \tan(180° + 30°) = \tan 30° = = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

5 Razones trigonométricas de un ángulo cualquiera

Ten en cuenta

En la práctica, se toma el semieje positivo de las abscisas como lado inicial de los ángulos de giro. El sentido es positivo si es contrario al de las agujas del reloj, o negativo si tiene el mismo sentido que las agujas del reloj.

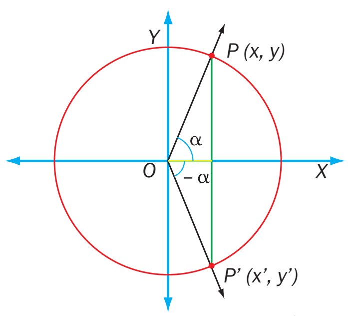


Figura 6

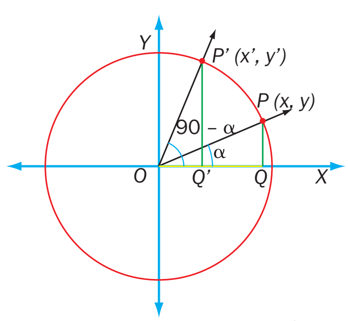


Figura 7

TECNOLOGÍAS de la información y la comunicación

www.e-sm.net/9smt13

Evalúa tus conocimientos sobre el cálculo de las razones trigonométricas de un ángulo cualquiera.

5.3 Razones trigonométricas de ángulos opuestos y de ángulos complementarios

Ángulos opuestos: α y $-\alpha$

Los ángulos α y $-\alpha$ son opuestos, por lo que:

$$\operatorname{sen}(-\alpha) = -\operatorname{sen}\alpha \qquad \cos(-\alpha) = \cos\alpha$$

$$\tan(-\alpha) = -\tan\alpha$$

Ejemplo 4

Los puntos P y P' son simétricos con respecto al eje de abscisas (Figura 6).

$y' = -y \Rightarrow \operatorname{sen}(-\alpha) = -\operatorname{sen}\alpha$

$x' = x \Rightarrow \cos(-\alpha) = \cos\alpha$

$$\tan(-\alpha) = \frac{\operatorname{sen}(-\alpha)}{\cos(-\alpha)} = \frac{-\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha} = -\tan\alpha$$

Ángulos complementarios: α y $90° - \alpha$

Los ángulos α y $90° - \alpha$ son complementarios, por lo tanto:

$$\operatorname{sen}(90° - \alpha) = \cos\alpha \qquad \cos(90° - \alpha) = \operatorname{sen}\alpha$$

$$\tan(90° - \alpha) = \frac{1}{\tan\alpha}$$

Ejemplo 5

Los triángulos $\triangle OPQ$ y $\triangle OP'Q'$ de la Figura 7 son congruentes.

$y' = x \Rightarrow \operatorname{sen}(90° - \alpha) = \cos\alpha$

$x' = y \Rightarrow \cos(90° - \alpha) = \operatorname{sen}\alpha$

$$\tan(90° - \alpha) = \frac{\operatorname{sen}(90° - \alpha)}{\cos(90° - \alpha)} = \frac{\cos\alpha}{\operatorname{sen}\alpha} = \frac{1}{\tan\alpha}$$

Actividad resuelta

Ejercitación

1 Calcula las razones trigonométricas de 330º.

Solución:

Al trazar el ángulo 330º en posición normal (Figura 8) se observa que su lado terminal coincide con el ángulo −30°. Por lo tanto:

$$\operatorname{sen}330° = \operatorname{sen}(-30°) = -\operatorname{sen}30° = -\frac{1}{2}$$

$$\cos330° = \cos(-30°) = \cos30° = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\tan330° = \tan(-30°) = -\tan30° = -\frac{\sqrt{3}}{3}$$

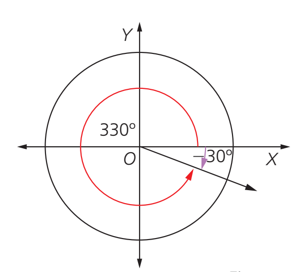


Figura 8

Destreza con criterios de desempeño: Determinar las razones trigonométricas de un ángulo cualquiera.

Desarrolla tus destrezas

Ejercitación

2 Calcula las razones trigonométricas de los siguientes ángulos.

a. π b. $270°$
c. $150°$ d. $225°$
e. $\frac{2\pi}{3}$ f. $\frac{3\pi}{4}$
g. $135°$ h. $240°$
i. $\frac{\pi}{4}$ j. $\frac{5\pi}{6}$
k. $-120°$ l. $\frac{5\pi}{2}$
m. $-300°$ n. $\frac{5\pi}{3}$
ñ. $-225°$ o. $\frac{\pi}{2}$

3 Calcula el valor de las siguientes razones trigonométricas.

a. $\text{sen}\,\frac{5\pi}{6}$ b. $\text{sen}\,\frac{3\pi}{4}$ c. $\cos\frac{3\pi}{4}$
d. $\cos\frac{2\pi}{3}$ e. $\tan\frac{3\pi}{4}$ f. $\tan\frac{5\pi}{6}$

4 Calcula los valores para los siguientes ángulos negativos.

a. $\text{sen}(-60°)$ b. $\cos(-45°)$
c. $\text{sen}\left(-\frac{\pi}{4}\right)$ d. $\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right)$
e. $\cos\left(-\frac{\pi}{10}\right)$ f. $\tan(-30°)$

Comunicación

5 Halla las otras dos razones trigonométricas de un ángulo α, tal que $\tan\alpha = 4$.

Razonamiento

6 Halla el valor de los ángulos que se muestran en las Figuras 9 y 10.

a.

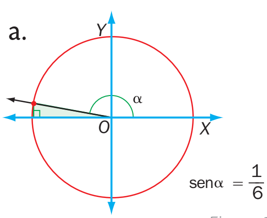


Figura 9

b.

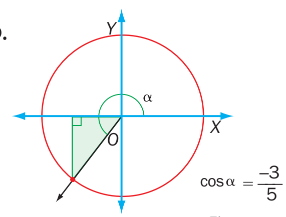


Figura 10

7 Calcula los valores que se piden, si α es un ángulo agudo y $\text{sen}\,\alpha = 0{,}64$.

a. $\text{sen}(180° - \alpha)$ b. $\cos(90° - \alpha)$
c. $\text{sen}(-\alpha)$ d. $\text{sen}(180° + \alpha)$

8 Halla, en cada caso, las otras dos razones trigonométricas del ángulo α.

a. Si $\cos\alpha = -\frac{4}{7}$ y $180° \leq \alpha \leq 270°$
b. Si $\text{sen}\,\alpha = -\frac{9}{10}$ y $270° \leq \alpha \leq 360°$
c. Si $\tan\alpha = -\sqrt{8}$ y $90° \leq \alpha \leq 180°$

9 Encuentra las razones trigonométricas de estos ángulos si se sabe que $\cos\alpha = \frac{10}{11}$ y $\frac{3\pi}{2} \leq \alpha \leq 2\pi$.

a. $\alpha + \pi$ b. $2\pi - \alpha$
c. $\pi - \alpha$ d. $\frac{\pi}{2} - \alpha$

10 Halla las razones trigonométricas de los ángulos suplementario y opuesto de α, si $\tan\alpha = -\sqrt{15}$ y $\frac{\pi}{2} \leq \alpha \leq \pi$.

Resolución de problemas

PAI Proyecto de Activación de las Inteligencias

11 En la Figura 11 aparece dibujado el primer cuadrante de la circunferencia goniométrica.

En esta se consideran dos ángulos α y β tales que la amplitud del segundo es igual a la del primero aumentada en un 50%.

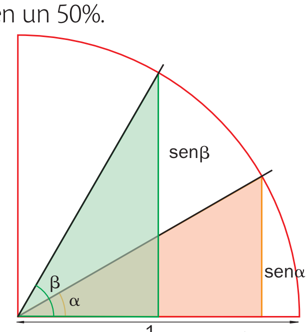


Figura 11

a. Halla el valor del seno de cada uno de los ángulos si $\alpha = 30°$. Determina en qué porcentaje aumentó el seno de β en relación con el de α.

b. ¿En qué porcentaje aumenta el seno de β si el ángulo α mide $60°$?

c. ¿Crees que los senos de los ángulos son proporcionales a las amplitudes de los mismos?

6 Trigonometría con la calculadora

Explora

La calculadora científica permite obtener las razones trigonométricas de un ángulo cualquiera sin importar si su medida está dada en grados o en radianes.

- Determina las funciones de la calculadora científica que facilitan estos cálculos.



Figura 1

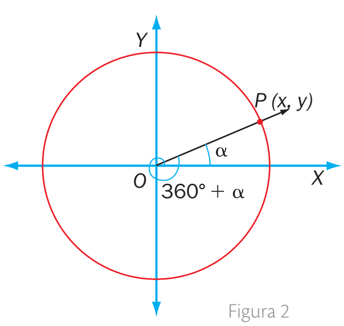


Figura 2

En primer lugar, se debe comprobar el modo de la unidad angular en la que está funcionando la calculadora. Generalmente, la unidad por defecto es el grado sexagesimal; de no ser así, es necesario consultar el manual para aprender a utilizar el modo en radianes y en el sistema sexagesimal.

En la Figura 1 se han señalado las teclas correspondientes a las funciones seno, coseno y tangente.

Ejemplo 1

Para hallar el valor de sen25°, cos95,48° y tan $\frac{6\pi}{5}$ con ayuda de la calculadora, se procede como sigue:

- Para sen25° se digita la secuencia:

  sin 2 5

  Según el tipo de calculadora, puede variar el orden en el que se digitan la medida del ángulo y la función. En cualquier caso, el resultado es el mismo: sen25° = 0,4226.

- Análogamente, para cos95,48° se digita:

  cos 9 5 • 4 8

  El resultado es cos95,48° = −0,0955.

- Por último, para tan $\frac{6\pi}{5}$ se ajusta el modo de la calculadora para trabajar con radianes (modo RAD) y se utiliza la secuencia:

  tan 6 SHIFT EXP a b/c 5 EXE

  Así, se obtiene que tan $\frac{6\pi}{5}$ = 0,7265.

6.1 Ecuaciones trigonométricas

Las **ecuaciones trigonométricas** son aquellas en las que aparecen una o más razones trigonométricas de la incógnita.

Actividad resuelta

Comunicación

1 Indica la medida de todos los ángulos x que cumplen que sen$x$ = 0,5.

Solución:

Para resolver ecuaciones trigonométricas con ayuda de la calculadora, se pueden digitar estas secuencias:

SHIFT sin   SHIFT cos   SHIFT tan

En este caso, se digita:

SHIFT sin 0 • 5

Se obtiene 30°, pero como sen$x > 0$, se sabe que x es la medida de ángulos que pertenecen al primer o segundo cuadrante, es decir, $x = 30°$ o $x = 150°$. Además, las razones trigonométricas de un ángulo y todos los que se expresan como un número entero de vueltas más este son iguales (Figura 2).

Así: $x = 30° + 360°k$, con $k \in \mathbb{Z}$, y $x = 150° + 360°k$, con $k \in \mathbb{Z}$.

Destreza con criterios de desempeño: Hallar ángulos y resolver ecuaciones trigonométricas con el uso de la calculadora.

MatemaTICS

Construye ángulos en la circunferencia goniométrica con GeoGebra

Para trazar ángulos en la circunferencia goniométrica y conocer su medida —sin importar en cuál cuadrante se encuentre su lado terminal—, se pueden utilizar algunas de las herramientas de la barra principal de GeoGebra, como se muestra a continuación.



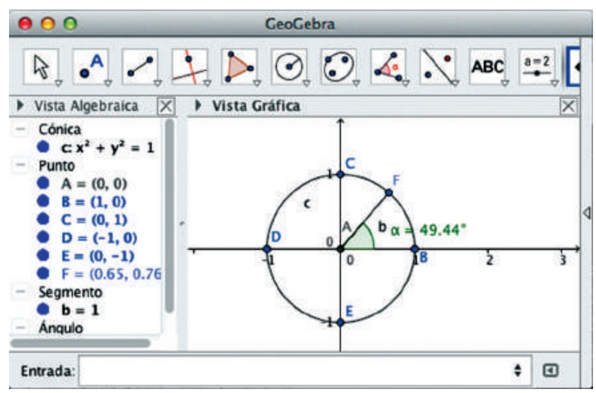
- En el menú  selecciona la opción *Circunferencia* (centro, radio). Haz clic sobre el punto (0, 0) y, en el cuadro de diálogo en el que se pide introducir el radio, digita 1. De esta manera obtienes la circunferencia goniométrica.

  En la barra de Entrada, introduce, uno a la vez, los puntos de corte de la circunferencia con los ejes: B=(1,0), C=(0,1), D=(−1,0) y E=(0,−1).

- Selecciona el menú . Luego, haz clic sobre un punto de la circunferencia en el primer cuadrante. Este punto se nombra automáticamente como F. Para desplazarlo, selecciónalo con el puntero .

- En el menú  selecciona la opción *Segmento* y traza los segmentos BA y AF en el orden que indican las letras. Para medir el ángulo BAF, en el menú  selecciona la opción *Ángulo*. Haz clic en los tres puntos en el orden B, A y F. Verifica que la medida del ángulo BAF aparece en color verde.

- Selecciona el punto F y muévelo libremente. Observa cómo varía la medida del ángulo, según en donde se encuentre el punto F.



Desarrolla tus destrezas

Ejercitación

2 Halla el seno, el coseno y la tangente de estos ángulos con ayuda de la calculadora.

a. 275°
b. 124° 16′
c. 1,5 rad
d. $\frac{2\pi}{5}$ rad
e. −120°
f. $-\pi$ rad

Comunicación

3 Resuelve las siguientes ecuaciones trigonométricas.

a. $\tan x = -1$
b. $\cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}$
c. $\operatorname{sen} x = 0$
d. $\cos x = -0{,}7561$
e. $\operatorname{sen} x = 1$
f. $\cos x = 0$

4 Soluciona las ecuaciones trigonométricas que se proponen. Expresa los resultados en grados.

a. $\cos x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$
b. $1 - \cos x = 0$
c. $\operatorname{sen} x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$
d. $\tan x = -1$

5 Soluciona las siguientes ecuaciones trigonométricas. Expresa los resultados en radianes.

a. $\tan x = -2$
b. $2 - 5\cos x = 6$
c. $\operatorname{sen} x = -1$
d. $\tan x = 1$

Resolución de problemas

6 Si α es un ángulo agudo tal que $\cos\alpha = 0{,}2$, ¿cuál es el valor de la $\tan\alpha$?

7 Teorema de Pitágoras

Explora

Según el teorema de Pitágoras, en un triángulo rectángulo el cuadrado de la medida de la hipotenusa es igual a la suma de las medidas de los cuadrados de los catetos.

- Utiliza argumentos geométricos para demostrar este teorema.

CULTURA del Buen Vivir

La cooperación

Trabajar en cooperación trae ventajas. Algunas de ellas son: mayor coordinación, valoración positiva de los demás y mayor satisfacción personal, entre otras.

- ¿Qué tipo de actitudes caracterizan a una persona cooperativa?

Para demostrar geométricamente la relación que plantea el teorema de Pitágoras, se pueden seguir estos pasos.

1.º Se parte del triángulo rectángulo de hipotenusa *a* y catetos *b* y *c* (Figura 1).

2.º Se construye un cuadrado de lado *a* y se dibujan cuatro triángulos congruentes al primero (Figura 2).

3.º Se rotan dos de los triángulos (como se ve en la Figura 3).

4.º Si se prolonga un lado, se observa que la nueva figura está formada por dos cuadrados, uno de lado *b* y otro de lado *c*. Con esto, el área del cuadrado de lado *a* es igual a la suma de las áreas de los cuadrados de lados *b* y *c*, respectivamente; es decir, $a^2 = b^2 + c^2$ (Figura 4).

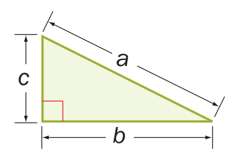


Figura 1

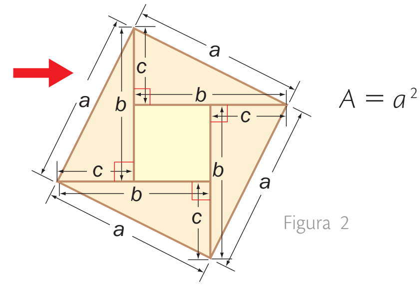


Figura 2

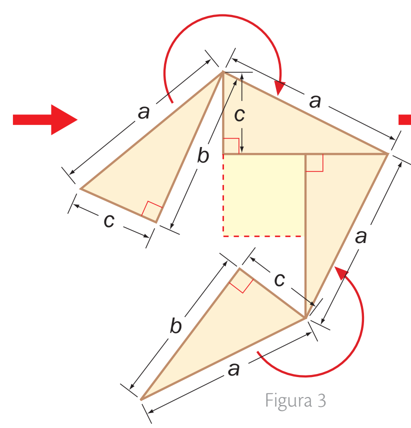


Figura 3

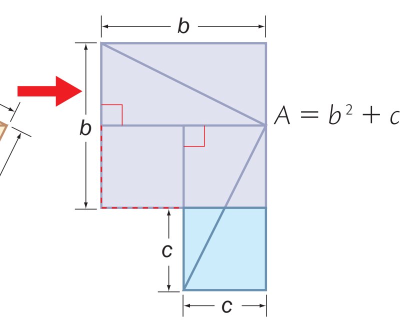


Figura 4

7.1 Medidas indirectas

Algunas longitudes no se pueden medir directamente con instrumentos; por ejemplo, alturas muy elevadas o lugares inaccesibles. Por eso se dice que son **medidas indirectas**. En esos casos, se pueden utilizar relaciones como el teorema de Pitágoras.

Ejemplo 1

En la Figura 5, la torre está situada formando un ángulo recto con los extremos del lago. En este caso, se puede utilizar el teorema de Pitágoras para hallar la medida *a* del largo del lago.

$$a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow a^2 = 40^2 + 30^2 = 2\,500 \Rightarrow a = \sqrt{2\,500} = 50$$

Entonces, el largo del lago mide 50 m.

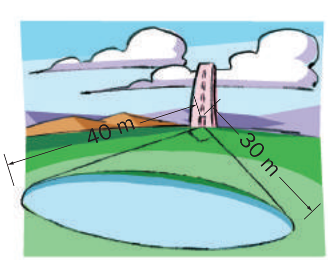


Figura 5

Destreza con criterios de desempeño: Demostrar el Teorema de Pitágoras utilizando áreas de regiones rectangulares.

7.2 Reconocimiento de triángulos rectángulos

Un **triángulo** de lados conocidos *a*, *b*, *c* es **rectángulo** si cumple el teorema de Pitágoras.

Para saber si un triángulo es rectángulo, se pueden hacer dos cosas:

1. Se miden sus ángulos con un transportador para comprobar si alguno de ellos es recto. Al medir los ángulos del triángulo de la Figura 6, se comprueba que $\measuredangle A$ mide 90° y, por tanto, el triángulo es rectángulo.

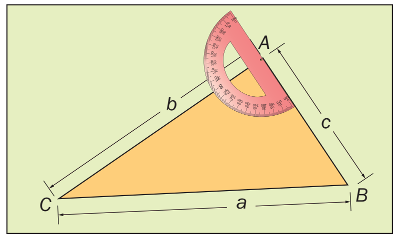


Figura 6

2. Si se conoce la medida de sus lados, o se pueden medir, basta comprobar si cumplen o no con el teorema de Pitágoras.

$$a^2 = b^2 + c^2$$

Ejemplo 2

Observa cómo se justifica que el $\triangle ABC$ de la Figura 7 es rectángulo.

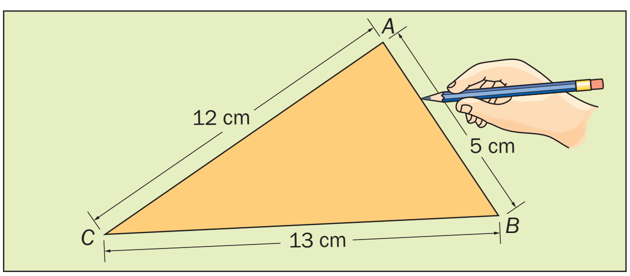


Figura 7

En el triángulo *ABC* la hipotenusa mide 13 cm, y los catetos miden 5 cm y 12 cm, respectivamente. Se comprueba si se cumple el teorema de Pitágoras así:

$$\left.\begin{array}{l} 13^2 = 169 \\ 12^2 + 5^2 = 144 + 25 = 169 \end{array}\right\} \Rightarrow \text{El triángulo es rectángulo.}$$

Ejemplo 3

Observa cómo se comprueba, sin dibujar, si el triángulo de lados 4 cm, 3 cm y 2 cm es rectángulo o no.

Si es rectángulo, la hipotenusa debe ser el lado mayor (el lado de 4 cm) y se debe cumplir el teorema de Pitágoras: $4^2 = 3^2 + 2^2$

Entonces, se calcula: $4^2 = 16$ y $3^2 + 2^2 = 9 + 4 = 13$

Como $16 \neq 13$, no se cumple el teorema de Pitágoras; por tanto, el triángulo no es rectángulo.

Ten en cuenta

Las medidas de los lados de un triángulo rectángulo son tres números que reciben el nombre de **terna pitagórica**.

Por ejemplo, 3, 4 y 5 forman una terna pitagórica porque:

$$5^2 = 4^2 + 3^2$$

TECNOLOGÍAS de la información y la comunicación

www.e-sm.net/9smt14

Complementa tus conocimientos sobre el teorema de Pitágoras.

Razonamiento matemático

En la figura, $\triangle MNO$ y $\triangle MNP$ son triángulos rectángulos congruentes cuyo ángulo menor mide 30º.

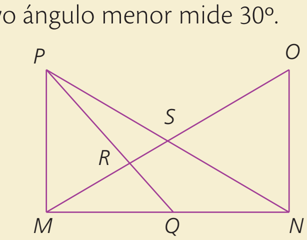


Figura 8

- ¿Cuál es la medida de los ángulos del cuadrilátero *QNSR*?

7 Teorema de Pitágoras

7.3 Cálculo de distancias

El teorema de Pitágoras permite calcular la **distancia entre dos puntos** que son vértices de un triángulo rectángulo o que tienen alguna relación con él.

Ejemplo 4

El dormitorio de Pablo es rectangular, y sus lados miden 3 m y 4 m. Se decidió dividirlo en dos con una cortina que une dos esquinas opuestas (Figura 9). Para determinar cuánto mide la cortina, se procede así:

La diagonal y los lados del dormitorio forman un triángulo rectángulo en el que la diagonal es la hipotenusa.

Por el teorema de Pitágoras:
$d^2 = 3^2 + 4^2$

Se opera: $d^2 = 9 + 16 = 25$

Se despeja: $d = \sqrt{25} = 5$

Por lo tanto, la cortina mide 5 m.

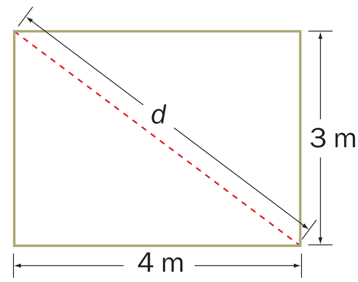


Figura 9

Ejemplo 5

El trazado de un rascacielos es como el de la Figura 10. Se puede calcular la medida del lado oblicuo aplicando el teorema de Pitágoras.



Al trazar la altura, se obtiene un triángulo rectángulo: la hipotenusa es el lado oblicuo, un cateto es la altura, y el otro, la diferencia de las bases (Figura 10).

Por el teorema de Pitágoras: $d^2 = 8^2 + 6^2$

Se opera: $d^2 = 64 + 36 = 100$

Se despeja: $d = \sqrt{100} = 10$

Así que, el lado oblicuo mide 10 m.

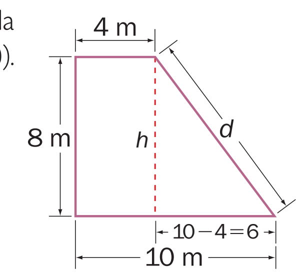


Figura 10

Actividad resuelta

Resolución de problemas

1. Calcula la apotema de un hexágono de 10 cm de lado (Figura 11).

Solución:

En un hexágono regular, el segmento que une el centro con un vértice mide lo mismo que un lado. Entonces, la apotema es un cateto de un triángulo rectángulo, y el otro cateto mide la mitad del lado.

Aplicando el teorema de Pitágoras:
$10^2 = h^2 + 5^2$

$h^2 = 10^2 - 5^2 = 75 \Rightarrow h = \sqrt{75} \approx 8{,}66$ cm

Entonces, la apotema mide aproximadamente 8,66 cm.

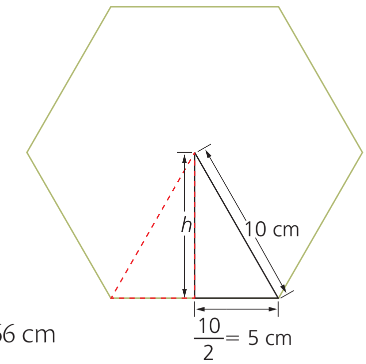


Figura 11

Destreza con criterios de desempeño: Calcular distancias empleando el Teorema de Pitágoras.

Desarrolla tus destrezas

Ejercitación

2 Indica cuáles de las siguientes ternas de números forman una terna pitagórica. Justifica.

a. 28, 195, 197
b. 17, 144, 140
c. 11, 61, 15
d. 11, 61, 60
e. 7, 24, 25
f. 8, 9, 15
g. 9, 10, 11
h. 16, 63, 65
i. 6, 8, 10
j. 7, 10, 13

3 Calcula el lado desconocido del triángulo de la figura 12

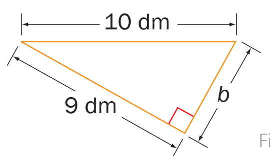


Figura 12

Comunicación

4 Determina el perímetro del rectángulo de la Figura 13, cuyas medidas de la base y la diagonal son 7 cm y 7,5 cm, respectivamente.

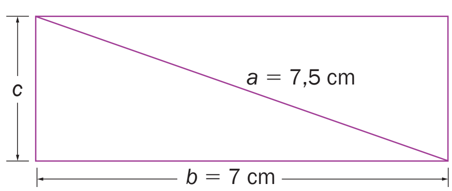


Figura 13

5 Calcula la hipotenusa de un triángulo rectángulo si se sabe que los catetos miden 1 dm y 12 dm, respectivamente.

Razonamiento

6 Determina, sin hacer el dibujo, si son triángulos rectángulos los triángulos cuyos lados tienen las medidas dadas.

a. 6 dm, 10 dm y 8 dm
b. 50 cm, 120 cm y 130 cm
c. 11 cm, 9 cm y 2 cm
d. 25 cm, 20 cm y 15 cm
e. 3 dm, 5 dm y 6 dm
f. 7 cm, 10 cm y 15 cm

7 Halla la apotema de un hexágono regular cuyo lado mide 16 cm.

8 Calcula la medida de estos segmentos.

a. La altura de un triángulo equilátero de 8 cm de lado.
b. La altura de un trapecio isósceles de bases 4 cm y 6 cm, y lados congruentes de 5 cm.

9 Lee y realiza lo que se indica a continuación.

Los lados de un triángulo miden 3 cm, 4 cm y 6 cm.

a. Dibuja el triángulo y mide sus ángulos. ¿Es rectángulo?
b. Comprueba si cumple o no el teorema de Pitágoras.

Resolución de problemas

10 Los lados de un triángulo miden 45 cm, 27 cm y 36 cm. ¿Es un triángulo rectángulo? Justifica tu respuesta.

11 ¿Cuánto mide el lado de un cuadrado inscrito en una circunferencia de 7 cm de radio?

12 Un terreno rectangular es dividido por un río que lo atraviesa diagonalmente (Figura 14). El dueño necesita encerrar la parte del terreno en que se encuentran los animales. ¿Cuánta malla utilizará si las medidas de los lados que forman el ángulo recto son 12 m y 15 m?

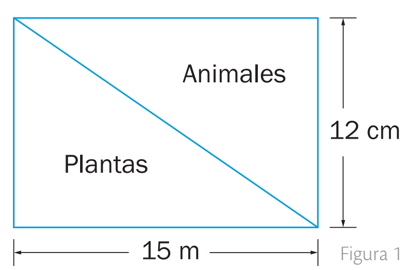


Figura 14

13 Dos aviones salen del mismo aeropuerto. Uno se dirige hacia el norte y el otro hacia el oriente. Cuando se encuentran, a 1 580 km uno del otro, uno de ellos ha recorrido 800 km. ¿Qué distancia ha recorrido el otro avión?

14 En el centro de una plaza de forma circular de 300 m de diámetro hay una estatua sobre un pedestal que mide 2,5 m de altura. Con un teodolito situado en el borde de la plaza, se observa la parte más alta de la estatua bajo un ángulo de 6º. Si la mira del teodolito se encuentra a 1,2 m del suelo, ¿cuánto mide la estatua?

8 Resolución de triángulos rectángulos

Explora

La hipotenusa del triángulo rectángulo isósceles de la Figura 1 mide 10 cm.

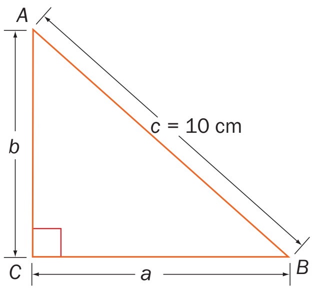


Figura 1

- Halla la medida de los ángulos agudos y de los catetos.

Dado que ABC es un triángulo rectángulo, se sabe que $m\measuredangle C = 90°$. Además, por ser isósceles, los ángulos agudos son congruentes entre sí. Es decir:

$$m\measuredangle A + m\measuredangle B = 90° \Rightarrow m\measuredangle A = m\measuredangle B = 45°$$

Para averiguar la medida del cateto b, se puede plantear la siguiente ecuación.

Aproximación a las milésimas

$$\text{sen}45° = \frac{b}{10}, \Rightarrow b = 10\text{sen}45 = 10 \cdot 0{,}707 = 7{,}07 \text{ cm}$$

Al ser $a = b$, el lado a mide también 7,07 cm, con lo cual el triángulo queda resuelto, pues se sabe que:

$$a = 7{,}07 \text{ cm} \quad b = 7{,}07 \text{ cm} \quad c = 10 \text{ cm}$$

$$m\measuredangle A = 45° \quad m\measuredangle B = 45° \quad m\measuredangle C = 90°$$

Resolver un triángulo es hallar la medida de todos sus lados y de todos sus ángulos.

Ejemplo 1

En el triángulo rectángulo de la Figura 2, se observa que $m\measuredangle A = 90°$, $a = 5$ cm y $b = 4$ cm. Para determinar la medida del cateto c, la medida de los ángulos y el área del triángulo, se puede proceder de la siguiente manera.

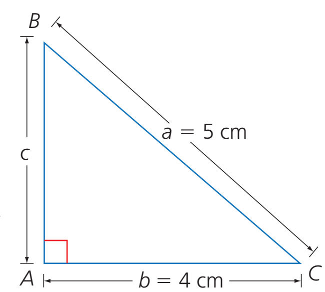


Figura 2

- Por el teorema de Pitágoras, se cumple que:

  $a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow c^2 = 5^2 - 4^2$

  $\Rightarrow c^2 = 9 \Rightarrow c = 3$ cm

- $\cos C = \dfrac{b}{a} = \dfrac{4}{5} = 0{,}8$

  Por lo tanto, $C = \arccos 0{,}8 = 36°\ 52'\ 12''$.

- Dado que, $m\measuredangle A + m\measuredangle B + m\measuredangle C = 180° \Rightarrow m\measuredangle B + m\measuredangle C = 90°$

  $\Rightarrow m\measuredangle B = 90° - m\measuredangle C$

  $\Rightarrow m\measuredangle B = 90° - 36°\ 52'\ 12''$

  $\Rightarrow m\measuredangle B = 53°\ 7'\ 48''$

- Finalmente el área es $\dfrac{bc}{2} = \dfrac{4 \cdot 3}{2} = 6 \text{ cm}^2$.

Ten en cuenta

La proyección de un cateto sobre la hipotenusa es el segmento contenido en la hipotenusa que une el pie de la altura trazada desde el vértice del ángulo recto con uno de los otros vértices.

App

Resolución de triángulos rectángulos

Abre la aplicación *Right Angle Triangle Solver* y utilízala para verificar tus soluciones de triángulos rectángulos.



8.1 Teorema de la altura

El cuadrado de la altura sobre la hipotenusa de un triángulo rectángulo es igual al producto de las proyecciones de los catetos sobre la misma.

Ejemplo 2

Por el teorema de Pitágoras, el triángulo rectángulo BCH de la Figura 3 cumple que:

$$a^2 = m^2 + h^2$$

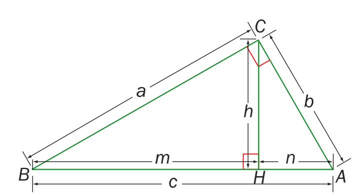


Figura 3

Por el teorema de la altura se tiene que $h^2 = m \cdot n$.

Luego, $a^2 = m^2 + m \cdot n = m(m + n) = m \cdot c$.

Destreza con criterios de desempeño: Aplicar el Teorema de Pitágoras a la resolución de triángulos rectángulos.

Ejemplo 3

Para calcular la medida del lado a del triángulo rectángulo de la Figura 4 se aplican el teorema de la altura y el teorema de Pitágoras.

- Por el teorema de la altura:

$h^2 = 9 \cdot 16 \Rightarrow h^2 = 144 \Rightarrow h = 12$ m

- Por el teorema de Pitágoras:

$a^2 = 9^2 + 12^2 \Rightarrow a^2 = 225 \Rightarrow a = 15$ m

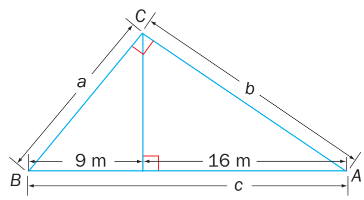


Figura 4

8.2 Teorema del cateto

El cuadrado de un cateto de un triángulo rectángulo es igual al producto de la hipotenusa por la proyección del cateto sobre la misma.

Ten en cuenta

En la Figura 5, se observa el triángulo rectángulo ABC.

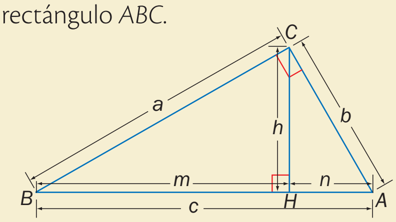


Figura 5

Por el teorema del cateto se cumple que:

$a^2 = m \cdot c$

$b^2 = n \cdot c$

Ejemplo 4

Para resolver el triángulo rectángulo de la Figura 6, en primer lugar se tiene en cuenta que las proyecciones de los catetos sobre la hipotenusa miden 18 m y 32 m, respectivamente. Por lo tanto, la medida de la hipotenusa c es:

$$18 + 32 = 50 \text{ m}$$

Además, por el teorema del cateto se cumple que:

$$a^2 = 18 \cdot 50 \Rightarrow a^2 = 900 \Rightarrow a = 30$$

$$b^2 = 32 \cdot 50 \Rightarrow b^2 = 1\,600 \Rightarrow b = 40$$

Como $\cos B = \frac{18}{30} = 0{,}6$, entonces $m\measuredangle B = \arccos 0{,}6 = 53° \, 7' \, 49''$.

Análogamente:

$$m\measuredangle A = \arccos \frac{32}{40} = 36° \, 52' \, 12''$$

Por lo tanto:

$$a = 30 \text{ cm} \qquad b = 40 \text{ cm} \qquad c = 50 \text{ cm}$$

$$m\measuredangle A = 36° \, 52' \, 12'' \quad m\measuredangle B = 53° \, 7' \, 49'' \quad m\measuredangle C = 90°$$

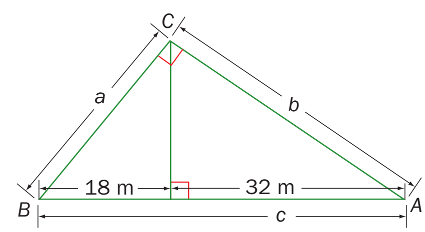


Figura 6

Ejemplo 5

El triángulo PQR de la Figura 7 es rectángulo con el ángulo recto en Q. Además se observa que $m\measuredangle P = 60°$, por lo cual, $m\measuredangle R = 30°$.

- Para averiguar la medida del cateto p, se tiene en cuenta la definición de la razón trigonométrica seno:

$\text{sen}60° = \frac{p}{7} \Rightarrow p = 7 \cdot \text{sen}60° \Rightarrow p = 7 \cdot (0{,}87)$

$\Rightarrow p = 6{,}09$ cm

- Aplicando el teorema de Pitágoras, se obtiene:

$q^2 = p^2 + r^2 \Rightarrow r^2 = q^2 - p^2$

$\Rightarrow r^2 = 7^2 - (6{,}09)^2 \Rightarrow r^2 = 49 - 37{,}088\,1$

$\Rightarrow r^2 = 11{,}9119 \Rightarrow r = 3{,}54$ cm

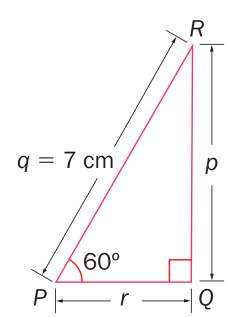


Figura 7

8 Resolución de triángulos rectángulos

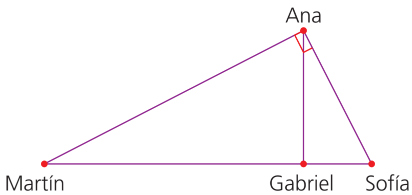


Figura 8

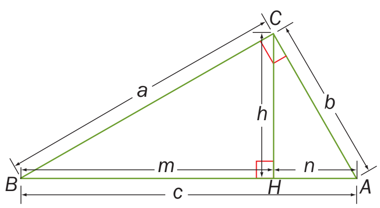


Figura 9

Actividad resuelta

Resolución de problemas

1 Las casas de Sofía, Ana, Gabriel y Martín están ubicadas como se muestra en la Figura 8. Si la distancia de la casa de Sofía a la de Martín es de 3 km y la distancia de la casa de Sofía a la de Gabriel es 1,08 km, ¿a cuántos kilómetros corresponden las siguientes distancias?

a. De la casa de Gabriel a la de Martín

b. De la casa de Sofía a la de Ana

c. De la casa de Ana a la de Gabriel

Solución:

La situación se puede representar como en la Figura 9. Así:

a. Distancia de la casa de Gabriel a la de Martín:

$$m = c - n = 3 - 1{,}08 = 1{,}92 \text{ km}$$

b. Distancia de la casa de Sofía a la de Ana (por teorema del cateto):

$$b^2 = n \cdot c = 1{,}08 \cdot 3 = 3{,}24 \Rightarrow b = 1{,}8$$

c. Distancia de la casa de Ana a la de Gabriel (por teorema de Pitágoras):

$$h^2 = b^2 - n^2 \Rightarrow h^2 = (1{,}8)^2 - (1{,}08)^2 \Rightarrow h^2 = 2{,}0736 \Rightarrow h = 1{,}44 \text{ km}$$

Desarrolla tus destrezas

Ejercitación

2 Calcula la medida de los lados y los ángulos que faltan en los triángulos rectángulos de las Figuras 10 a 15.

a.

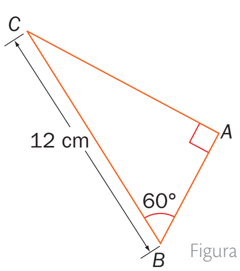


Figura 10

b.

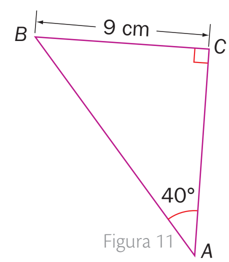


Figura 11

c.

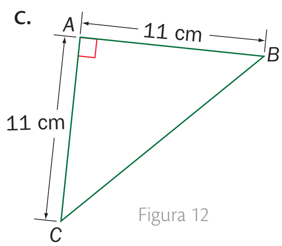


Figura 12

d.

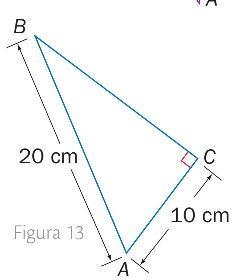


Figura 13

e.

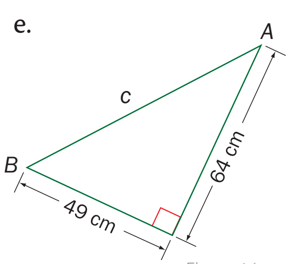


Figura 14

f.

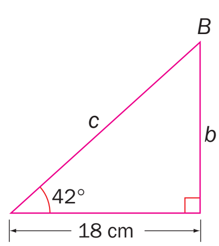


Figura 15

Razonamiento

3 Responde estas preguntas. Razona tus respuestas.

a. ¿Qué elementos de un triángulo rectángulo hay que conocer para resolverlo?

b. ¿Se puede resolver un triángulo conociendo solo dos de su ángulos? ¿Por qué?

Comunicación

4 Lee y resuelve.

Un **ángulo de depresión** es el que se forma entre la línea horizontal y la línea visual entre un observador y un objeto situado por debajo de la horizontal.

Desde la cima de un faro de 8 m de altura se divisa una lancha con un ángulo de depresión de 8º. Observa cómo se representa la situación en la Figura 16.

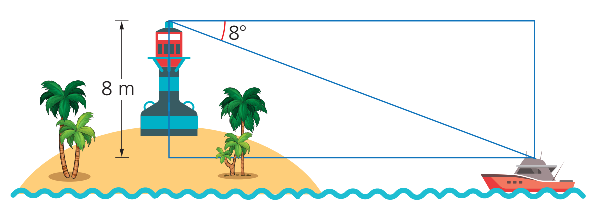


Figura 16

Calcula la distancia entre la lancha y el pie del faro en ese mismo instante.

Destreza con criterios de desempeño: Resolver y plantear problemas que involucren triángulos rectángulos en contextos reales e interpretar y juzgar la validez de las soluciones obtenidas dentro del contexto del problema.

Razonamiento

5 Halla la longitud de los lados de un triángulo rectángulo cuyas proyecciones de los catetos sobre la hipotenusa miden 6,4 cm y 3,6 cm, respectivamente.

6 Resuelve el triángulo rectángulo cuya hipotenusa mide 20 cm, si la proyección de uno de los catetos sobre ella mide 4 cm.

7 Halla las medidas de los ángulos de un triángulo rectángulo sabiendo que la hipotenusa y uno de los catetos miden 4 cm y 2 cm, respectivamente.

8 Calcula la medida de la altura sobre la hipotenusa y la distancia desde su pie hasta los extremos en un triángulo rectángulo, en el cual los catetos miden 6 cm y 8 cm.

9 Calcula la medida del lado de un rombo en el que la diagonal mayor mide 8 cm y forma con cada lado contiguo un ángulo de 26°.

10 Explica si es posible resolver un triángulo rectángulo conociendo la altura sobre la hipotenusa y la proyección de uno de los catetos sobre la misma.

11 Halla la medida de los ángulos del trapecio rectángulo de la Figura 17.

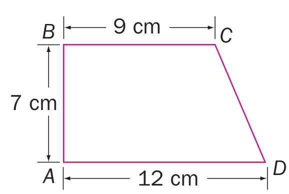


Figura 17

Resolución de problemas

12 Las proyecciones de los catetos sobre la hipotenusa de un triángulo rectángulo tienen la misma medida.

a. ¿Cómo es el triángulo?

b. ¿Cuánto miden sus ángulos agudos?

13 Usa el teorema de la altura para proponer cómo se podría construir un segmento cuya longitud sea media proporcional entre dos segmentos de 4 cm y 9 cm. ¿Cómo se podría construir si los segmentos son de *a* cm y *b* cm?

14 De un triángulo rectángulo se conoce que su hipotenusa mide 20 cm y la suma de los catetos mide 24 cm. ¿Cuánto mide su área?

15 Los catetos de un triángulo rectángulo miden 12 m y 27 m. ¿Cuál es la longitud de la altura del triángulo con respecto a la hipotenusa?

16 Para medir la distancia entre dos puntos, *A* y *B*, muy alejados se situaron dos personas sobre ellos. Una tercera persona está en un punto *C*, a 50 m de distancia de *A*, como se observa en la Figura 18

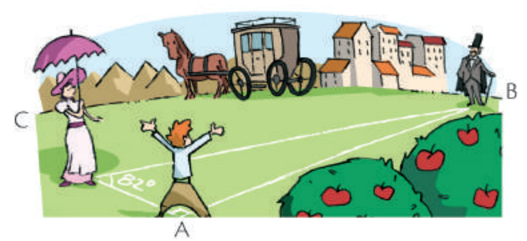


Figura 18

¿Cuál es la distancia que separa los puntos *A* y *B*?

17 Juan subió en un globo aerostático hasta una altura de 50 m. Sus padres siguen el vuelo desde el suelo, como aparece en la Figura 19.

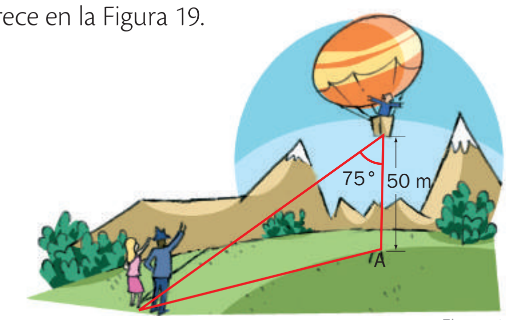


Figura 19

a. ¿A qué distancia del punto *A* se encuentran los padres de Juan?

b. Si el globo continúa subiendo en la misma dirección y se detiene cuando el ángulo de observación de Juan es de 60°, ¿a cuántos metros de altura se encontraría el globo en ese momento?

18 En el momento del día en que los rayos del sol forman un ángulo de 60° con la horizontal, la sombra que proyecta un árbol en el suelo es de 2,6 m. ¿Cuánto mide la altura del árbol?

19 Unas cigüeñas construyeron su nido sobre el tejado de un edificio a 25 m del suelo. Un niño lo observa desde un punto situado a 50 m del edificio. Calcula el ángulo de observación.

Medida de ángulos

Ejercitación

1. Completa la Tabla 1.

Grados	Radianes
135°	
175°	
235°	
330°	
360°	

Tabla1

Razones trigonométricas de triángulos rectángulos

Ejercitación

2. Halla las razones trigonométricas de cada triángulo rectángulo de las Figuras 1 a 4.

a.

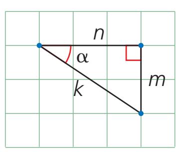


Figura 1

b.

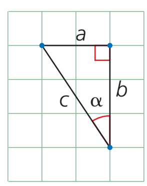


Figura 2

c.

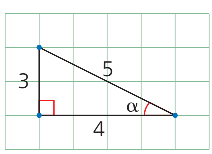


Figura 3

d.

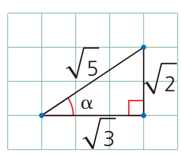


Figura 4

3. Halla el valor de la hipotenusa y las razones trigonométricas del ángulo α en cada caso.

a.

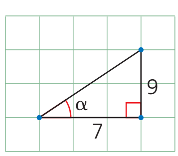


Figura 5

b.

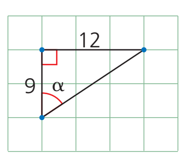


Figura 6

Comunicación

4. Lee y resuelve.

Si $\text{sen}\,\beta = \frac{5}{13}$ y $\cos\beta = \frac{12}{13}$:

a. Representa el triángulo rectángulo y ubica los valores correspondientes.

b. Calcula la razón trigonométrica tangente para el ángulo β.

c. Calcula las razones trigonométricas para el otro ángulo agudo del triángulo.

Razones trigonométricas de ángulos especiales

5. Encuentra el valor x en cada triángulo.

a.

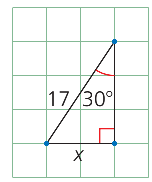


Figura 7

b.

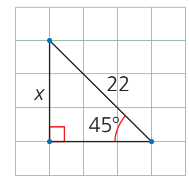


Figura 8

c.

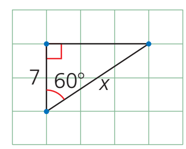


Figura 9

d.

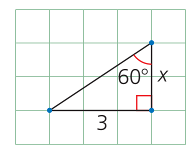


Figura 10

e.

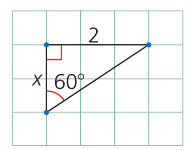


Figura 11

f.

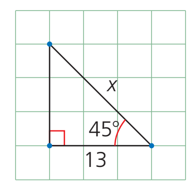


Figura 12

6. Evalúa cada expresión utilizando las razones trigonométricas de los ángulos especiales.

a. $\text{sen}\,30° + \cos 60°$

b. $\tan 45° + \sec 60°$

c. $\cos 45° - \cos 30°$

d. $\text{sen}\,30° \cdot \cos 30°$

Resolución de triángulos rectángulos

Resolución de problemas

7. Resuelve la siguiente situacion.

- Si la sombra del árbol de la Figura 13 es de 12 m, halla su altura.

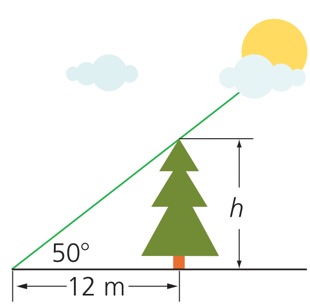


Figura 13

Estrategia: Descomponer una figura

Problema

Observa los triángulos de la Figura 1.

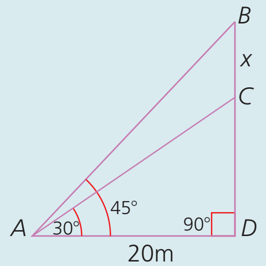


Figura 1

¿Cuál es el valor de x?

1. Comprende el problema

- ¿Qué información puedes observar en la Figura 1?
  R: dos triángulos rectángulos con un lado en común
- ¿Qué debes encontrar?
  R: el valor de x en la figura

2. Crea un plan

- Identifica cada uno de los triángulos involucrados, establece relaciones entre sus lados y propón una estrategia para calcular el valor de x.

3. Ejecuta el plan

- En la figura, los triángulos rectángulos ADB y ADC, tienen en común el lado $\overline{AD}$.
- El lado $\overline{BD}$ en el triángulo ADB mide 20 m; por ser isósceles cada uno de sus ángulos agudos mide 45°.
- En el triángulo ADC, $\tan 30° = \dfrac{CD}{20}$:

$\Rightarrow CD = 20 \cdot \tan 30°$

$\Rightarrow CD = 11{,}55$ m

Además $x + CD = 20$ m,

$\Rightarrow x = 20 \text{ m} - CD$

$x = 20 - 11{,}54$

$x = 8{,}45$ m

R: El valor de x en la Figura 1 es 8,45 m.

4. Comprueba la respuesta

- Verifica que la hipotenusa del triángulo rectángulo ADB mide $20\sqrt{2}$ m.

Aplica la estrategia

1. En la circunferencia de la Figura 2 se ha trazado una de sus cuerdas.

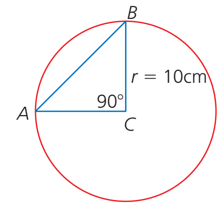


Figura 2

¿Cuál es la longitud de dicha cuerda?

a. Comprende el problema

....

....

b. Crea un plan

....

....

c. Ejecuta el plan

....

....

d. Comprueba la respuesta

....

....

Resuelve otros problemas

2. La rueda de una bicicleta tiene un diámetro de 120 cm, si su extremo gira un ángulo de 120°, ¿a cuánto equivale el ángulo de giro en radianes?
3. ¿Cuál es la relación entre el lado l y la altura h en un triángulo equilátero?
4. El $\operatorname{sen}\theta$ para θ, un ángulo en el tercer cuadrante, es $-\dfrac{\sqrt{5}}{3}$. ¿Cuál es el valor de $\cos\theta$?

Formula problemas

5. Inventa un problema que involucre la información de la Figura 3 y resuélvelo.

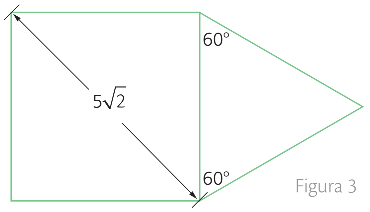


Figura 3

9 Longitudes y áreas de figuras planas

Explora

En la Figura 1 se muestra el plano de un teatro, en donde el área sombreada corresponde a la zona de silletería.

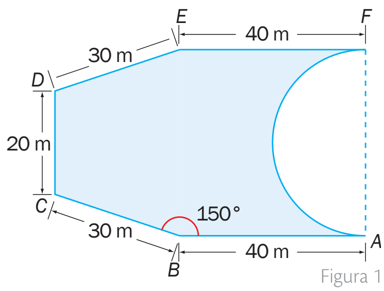


Figura 1

- Según la información de la figura1, ¿cuál es el área de la zona en la que se encuentran las sillas?

En la figura se observa que el plano del teatro tiene una forma irregular, por eso para hallar su área se pueden considerar, por separado, las figuras *ABEF* y *BCDE* (Figura 2).

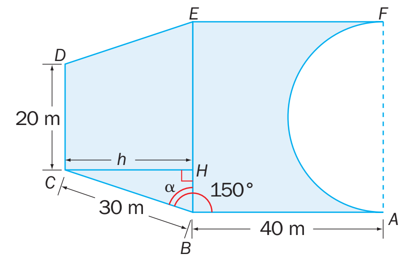


Figura 2

- Se traza una altura *h* del trapecio isósceles *BCDE* desde el vértice *C* (Figura 2). Entonces, $\triangle BCH$ es un triángulo rectángulo y $\alpha = 150° - 90° = 60°$.

$$\text{sen}60° = \frac{h}{30} \Rightarrow h = 25{,}98 \text{ m y } \cos 60° = \frac{BH}{30} \Rightarrow BH = 15 \text{ m}$$

Como $BC = DE$, se tiene que $\overline{BE}$ mide $15 + 20 + 15 = 50$ m.

Por lo tanto, $A_{\text{Trapecio}} = \dfrac{B + b}{2} \cdot h = \dfrac{50 + 20}{2} \cdot 25{,}98 = 909{,}3 \text{ m}^2$.

- El área del rectángulo *ABEF* es $40 \cdot 50 = 2\,000 \text{ m}^2$.

Por ser $AF = BE$, el radio de la circunferencia que pasa por *A* y por *F* mide 25 m.

Así, $A_{\text{Círculo}} = \pi r^2 = \pi \cdot 25^2 = 1\,963{,}5 \text{ m}^2$.

- Entonces, el área ocupada por la zona de silletería es:

$$A = 909{,}3 + 2\,000 - \frac{1\,963{,}5}{2} = 1\,927{,}55 \text{ m}^2$$

Además de ayudar en la solución de triángulos rectángulos, las razones trigonométricas proporcionan herramientas para el cálculo de longitudes y áreas de algunas figuras planas.

Ejemplo 1

Se quiere calcular el área del pentágono regular de lado 8 cm que se muestra en la Figura 3.

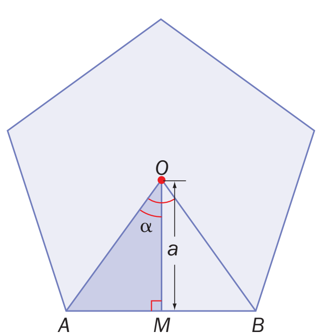


Figura 3

- Para hallar la medida de la apotema, se une el centro con dos vértices consecutivos. Los radios $\overline{OA}$ y $\overline{OB}$ determinan el ángulo central *O*. Luego:

$$m\measuredangle O = \frac{360°}{5} = 72°$$

La apotema divide el $\measuredangle AOB$ en dos ángulos congruentes y al $\overline{AB}$ en dos segmentos congruentes. Así, $\alpha = 36°$ y $AM = 4$ cm.

Por ser $\triangle AMO$ un triángulo rectángulo, se tiene:

$$\tan\alpha = \frac{AM}{a} \Rightarrow a = \frac{AM}{\tan\alpha}$$

Entonces, la apotema mide $a = \dfrac{4}{\tan 36°} = 5{,}51$ cm.

Por otra parte, si el perímetro del pentágono es $p = 5 \cdot 8 = 40$ cm,

su área *A* se puede calcular como se muestra a continuación:

$$A = \frac{p \cdot a}{2} = \frac{40 \cdot 5{,}51}{2} = 110{,}2 \text{ cm}^2$$

Destreza con criterios de desempeño: Calcular la longitud y el área de figuras planas aplicando razones trigonométricas.

Actividad resuelta

Razonamiento

1 Determina la longitud del lado y de la apotema de un octágono regular inscrito en una circunferencia de 49 mm de radio. Halla su área.

Solución:

Según la información proporcionada, el polígono se puede representar como en la Figura 4.

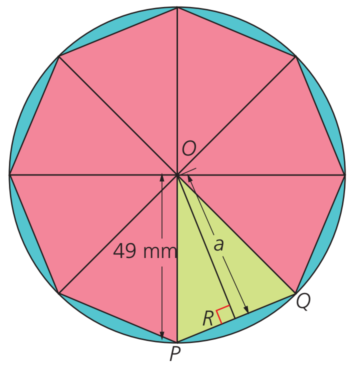


Figura 4

Como el octágono es regular, entonces se deduce que:

$$m\measuredangle POQ = \frac{360°}{8} = 45°$$

Dado que la apotema a divide al $\measuredangle POQ$ en dos ángulos congruentes y forma un ángulo recto con el lado del octágono, entonces:

$$\measuredangle QOR = 22{,}5°$$

Así, $\text{sen}22{,}5° = \frac{PR}{49} \Rightarrow PR = 49 \cdot \text{sen } 22{,}5° = 18{,}75 \text{ mm}.$

Además, $PQ = 2PR$, por lo cual, el lado del octágono es:

$$PQ = 2 \cdot 18{,}75° = 37{,}5 \text{ mm}$$

Para determinar la apotema, se tiene en cuenta que:

$$\cos 22{,}5° = \frac{a}{49} \Rightarrow a = 49 \cdot \cos 22{,}5° = 45{,}27 \text{ mm}$$

Por último, el área del octágono regular es:

$$A = \frac{p \cdot a}{2} = \frac{(8 \cdot 37{,}5) \cdot 45{,}27}{2} = 6\ 790{,}5 \text{ mm}^2$$

CULTURA del Buen Vivir

La cooperación

Un aspecto importante de la cooperación consiste en ayudar y servir a los demás de manera desinteresada.

- Escribe tres maneras en las que puedes cooperar con un compañero de clase para explicar a alguien los conceptos matemáticos que no entiende.

Desarrolla tus destrezas

Ejercitación

2 Calcula el área y el perímetro de los polígonos que se presentan en las Figuras 5 y 6.

a.

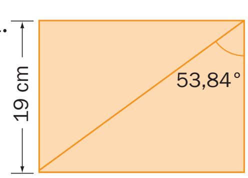


Figura 5

b.

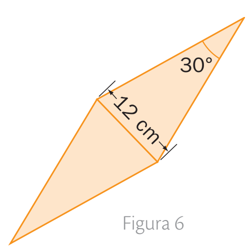


Figura 6

Comunicación

3 Calcula la longitud de los radios de las circunferencias inscrita y circunscrita en un octágono regular cuyo lado mide 12 m.

4 Halla el área de un pentágono regular inscrito en una circunferencia de 10 cm de radio.

5 Halla el perímetro y el área de un rectángulo en el que la diagonal mide 28,84 dm y forma con la base un ángulo de 33° 41′ 24″.

Resolución de problemas

6 En la Figura 7 se muestra el plano de un terreno con forma de paralelogramo.

a. ¿Cuál es el área del terreno?

b. Si se quiere cercar el terreno con tres vueltas de alambre, ¿qué cantidad se necesita?

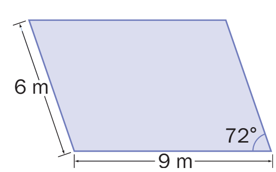


Figura 7

10 Áreas y volúmenes de cuerpos geométricos

Explora

En una fábrica de chocolates se empacan los nuevos productos en cajas cuya forma es un prisma trapezoidal, como se ve en la Figura 1.

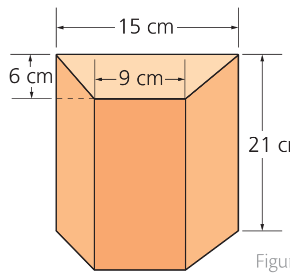


Figura 1

- Si se empacan chocolates de 7 cm³ de volumen, ¿cuántas unidades caben en la caja?

10.1 Área y volumen de prismas

Para resolver el problema es importante recordar que un **prisma** es un sólido conformado por dos polígonos paralelos congruentes, que se denominan bases, y por tantos paralelogramos como lados tengan las bases.

Además, es necesario saber que el volumen de un sólido es la medida del espacio que ocupa, pero, también, la medida de la cantidad de material que puede albergar.

Como se observa en la Figura 1, las bases de las cajas son trapecios, por lo tanto:

$$A_{\text{Trapecio}} = \frac{B+b}{2} \cdot h = \frac{15+9}{2} \cdot 6 = 72 \text{ cm}^2$$

El volumen del prisma es $V = A_{\text{Trapecio}} \cdot h \Rightarrow V = 72 \text{ cm}^2 \cdot 21 \text{ cm} = 1512 \text{ cm}^3$.

Ahora, como cada chocolate tiene un volumen de 7 cm³, entonces en la caja caben

$$1512 \div 7 = 216 \text{ chocolates.}$$

El **área total** de un prisma es la suma entre el área lateral y el área de las dos bases. El **volumen** corresponde al producto del área de la base por la altura.

Si en un prisma, P_B es el perímetro de la base; A_B, el área de la base, y h, la altura, entonces el área total, A_T, y el volumen, V, son respectivamente:

$$A_T = P_B h + 2A_B \qquad V = A_B h$$

Ejemplo 1

Para calcular el área total y el volumen del prisma triangular de la Figura 2, cuya base es un triángulo isósceles, se realiza lo siguiente:

- Se calcula la altura, h, del triángulo isósceles de la base:

$$h = \sqrt{3^2 - 2^2} = \sqrt{5}$$

- Se calcula el perímetro de la base, P_B:

$$P_B = 10 \text{ cm}$$

- Se calcula el área de la base, A_B:

$$A_B = \frac{4 \cdot \sqrt{5}}{2} = 2\sqrt{5} \text{ cm}^2$$

- Por lo tanto, el área total A_T es:

$$A_T = 10 \cdot 8 + 2 \cdot 2\sqrt{5} = 4\left(20 + \sqrt{5}\right) \text{cm}^2$$

- Así, el volumen, V, es $V = 2\sqrt{5} \cdot 8 = 16\sqrt{5} \text{ cm}^3$.

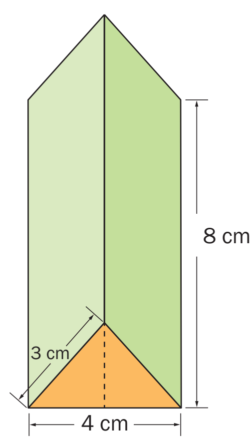


Figura 2

10.2 Área y volumen de pirámides

Una **pirámide** es un poliedro limitado por una base, que es un polígono cualquiera, y por caras, que son triángulos coincidentes en un vértice común.

El **área total** de una pirámide es la suma del área de las caras laterales y el área de la base. El **volumen** de una pirámide es la tercera parte del volumen de un prisma con la misma base y la misma altura.

Si en una pirámide, A_L es el área lateral; A_B, el área de la base, y h, la altura, entonces el área total, A_T, y el volumen, V, son respectivamente:

$$A_T = A_L + A_B \qquad V = \frac{A_B h}{3}$$

Destreza con criterios de desempeño: Calcular el volumen de pirámides, prismas, y cilindros aplicando las fórmulas respectivas.

Ejemplo 2

El área total y el volumen de la pirámide cuadrangular de la Figura 3, cuya altura es 7,23 cm, se calculan así:

$$A_T = 4 \cdot \overbrace{\frac{4 \cdot 7{,}5}{2}}^{A_L} + \overbrace{16}^{A_B} = 76\ \text{cm}^2$$

$$V = \frac{\overbrace{16}^{A_B} \cdot \overbrace{7{,}23}^{h}}{3} = 38{,}56\ \text{cm}^3$$

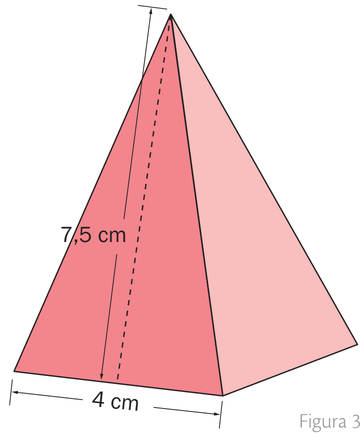


Figura 3

Razonamiento matemático

La base de una pirámide es un triángulo equilátero de lado x. Una de las caras laterales, perpendicular al plano de la base, es también un triángulo equilátero.

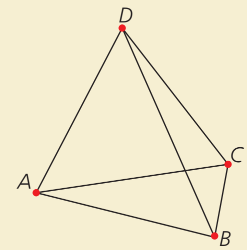


Figura 4

- ¿Cuáles son el área total y el volumen de la pirámide?

10.3 Área y volumen de cilindros

Un **cilindro** es un sólido limitado por dos bases circulares y una cara curva. Se obtiene cuando un rectángulo rota una vuelta entera alrededor de uno de sus lados. En la Figura 5, se observa un cilindro de altura h, cuyo radio de la base es r.

El **área total** de un cilindro recto es la suma del área lateral y el área de las dos bases. El **volumen** corresponde al producto del área de la base por la altura.

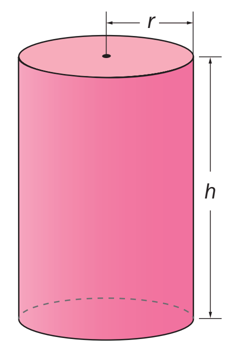


Figura 5

Si A_L es el área lateral de un cilindro recto, A_B es el área de la base, h es la altura y r es el radio de la base, entonces el **área total**, A_T, y el **volumen**, V, se calculan respectivamente como:

$$A_T = A_L + 2A_B \qquad V = A_B h$$

$$A_T = 2\pi rh + 2\pi r^2 = 2\pi r(h + r) \qquad V = \pi r^2 h$$

Ejemplo 3

En el cilindro recto de la Figura 6, la altura es de 10 cm y el radio de base, de 3 cm. Para calcular el área total y el volumen de este sólido, se aplican las fórmulas estudiadas anteriormente, como sigue:

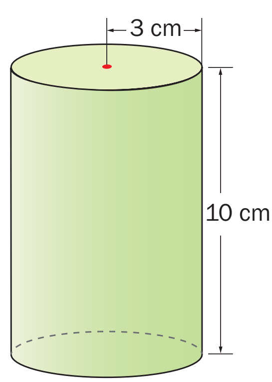


Figura 6

$$\begin{aligned} A_T &= 2\pi r(h + r) \\ &= 2\pi \cdot 3\ \text{cm} \cdot (10\ \text{cm} + 3\ \text{cm}) \\ &= 6\pi\ \text{cm} \cdot 13\ \text{cm} \\ &= 78\pi\ \text{cm}^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} V &= \pi r^2 h \\ &= \pi \cdot (3\ \text{cm})^2 \cdot 10\ \text{cm} \\ &= \pi \cdot 9\ \text{cm}^2 \cdot 10\ \text{cm} \\ &= 90\pi\ \text{cm}^3. \end{aligned}$$

Por lo tanto, el cilindro tiene 78π cm² de área total y 90π cm³ de volumen.

10 Áreas y volúmenes de cuerpos geométricos

10.4 Área y volumen de conos

Un **cono**, como el de la Figura 7, es un sólido limitado por una base circular y una cara curva, se obtiene al rotar un triángulo rectángulo alrededor de uno de sus catetos.

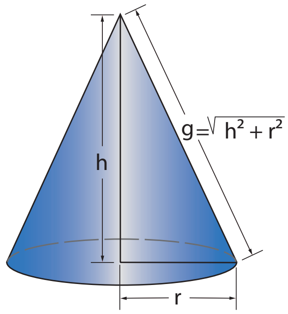


Figura 7

El **área total del cono** es la suma del área lateral con el área de la base. El **volumen del cono** es la tercera parte del volumen de un cilindro con la misma base y la misma altura.

Si A_L es el área lateral de un cono de altura h, A_B es el área de la base de radio r y g, la generatriz, entonces el área total, A_T, y el volumen, V, del cono son respectivamente:

$$A_T = A_L + A_B \qquad V = \frac{A_B h}{3}$$

$$A_T = \pi g r + \pi r^2 = \pi r(g + r) \qquad V = \frac{\pi r^2 h}{3}$$

Ejemplo 4

Para determinar el área total y el volumen de un cono de altura 12 cm, y cuyo diámetro de la base mide 5 cm, es necesario, en primer lugar, calcular la generatriz g del cono.

- Por el teorema de Pitágoras se tiene que:

$$g = \sqrt{h^2 + r^2} = \sqrt{12^2 + (2{,}5)^2} = 12{,}26 \text{ cm}$$

- Por lo tanto:

$$A_T = \pi \cdot 2{,}5 \cdot (12{,}26 + 2{,}5) = 36{,}9\pi \text{ cm}^2$$

$$V = \frac{\pi \cdot (2{,}5)^2 \cdot 12}{3} = 25\pi \text{ cm}^3$$

Actividad resuelta

Razonamiento

1. Determina el área total y el volumen del sólido representado en la Figura 8, si se sabe que el radio de la base es 2 cm.

Solución:

Se observa que la figura está compuesta por un cilindro y un cono. Por lo tanto, para determinar el área total, se suman el área lateral del cono, el área lateral del cilindro y el área de una de sus bases.

Por el teorema de Pitágoras, la generatriz del cono está dada por:

$$g = \sqrt{4^2 + 2^2} = 2\sqrt{5} \text{ cm}$$

De modo que:

$$A_T = \underbrace{\left(\pi \cdot 2\sqrt{5} \cdot 2\right)}_{A_{L\,\text{Cono}}} + \underbrace{2 \cdot \pi \cdot 2 \cdot 6}_{A_{L\,\text{Cilindro}}} + \underbrace{\pi \cdot 2^2}_{A_B}$$

$$= 4\pi\left(7 + \sqrt{5}\right) \text{cm}^2$$

El volumen del sólido es la suma de los volúmenes del cono y del cilindro:

$$V_{\text{Sólido}} = \frac{\pi \cdot 2^2 \cdot 4}{3} + \pi \cdot 2^2 \cdot 6 = \frac{88\pi}{3} \text{ cm}^3$$

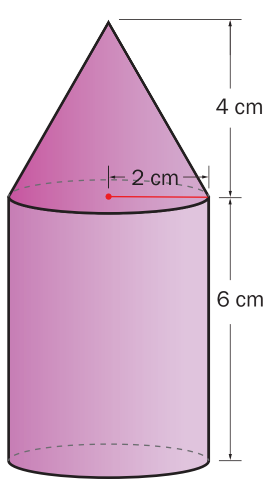


Figura 8

Destreza con criterios de desempeño: *Calcular el volumen de pirámides, prismas, conos y cilindros aplicando las fórmulas respectivas.*

Desarrolla tus destrezas

Ejercitación

2 Halla el área total y el volumen del siguiente sólido.

Un prisma de 47 mm de altura con base hexagonal regular de lado 20 mm

Comunicación

3 Calcula el área total y el volumen del prisma de la Figura 9, si se sabe que su base es un hexágono regular.

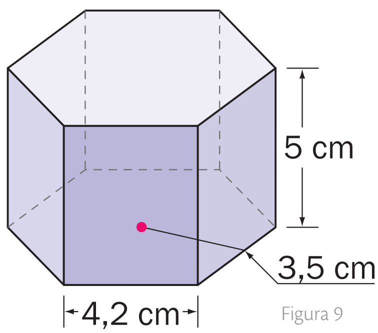


Figura 9

4 Halla el área total y el volumen de un cilindro de altura 4 dm, si se sabe que el radio de la base mide 1 dm.

5 Determina el volumen del sólido de la Figura 10.

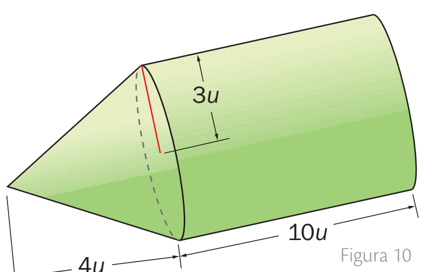


Figura 10

6 Halla el área total y el volumen del ortoedro presentado en la Figura 11.

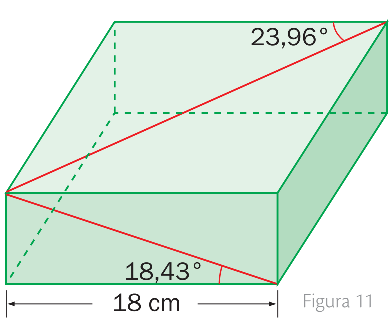


Figura 11

Resolución de problemas

7 ¿Cuál es el espacio ocupado por las pirámides de las Figuras 12 y 13, si sus bases son polígonos regulares?

a.

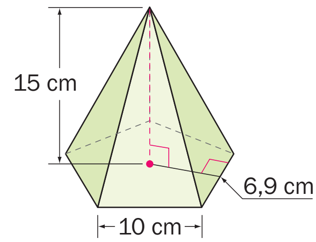


Figura 12

b.

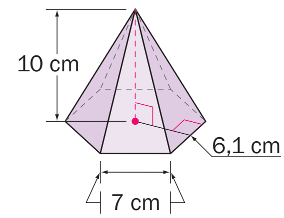


Figura 13

8 ¿Que cantidad de cartón se necesita para fabricar un empaque de 9,5 cm de largo, 2 cm de ancho y 3 cm de profundidad?

9 ¿Cuánto metal se requiere para fabricar una lata cilíndrica como la de la Figura 14?

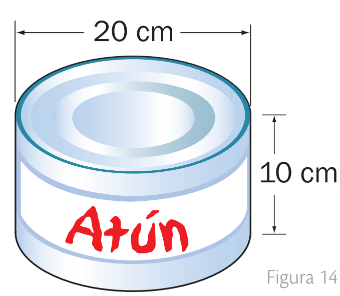


Figura 14

10 Para cada una de las Figuras 15 a 18, asígnales medidas e inventa un problema donde se pida calcular el área total y el volumen de cada una de ellas.

a.

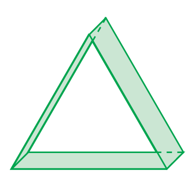


Figura 15

b.

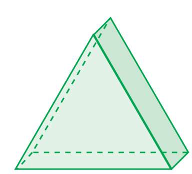


Figura 16

c.

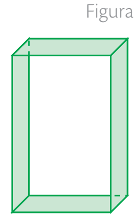


Figura 17

d.

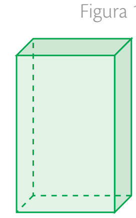


Figura 18

11 Áreas y volúmenes de cuerpos compuestos

Explora

La torre principal de una capilla finaliza con un sólido geométrico como el que se muestra en la figura 1.

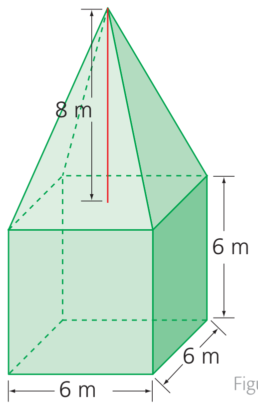


Figura 1

- ¿Qué proceso seguirías para poder calcular el área total de la torre?

La torre corresponde a un cuerpo geométrico compuesto, formado por un cubo y una pirámide cuadrangular. Luego, una manera de calcular el volumen total es calcular los volúmenes parciales de los sólidos y sumar los resultados.

Para calcular **el área y el volumen de un cuerpo compuesto**, se deben descomponer en cuerpos simples, calcular los volúmenes o áreas parciales, y sumarlos.

Ejemplo 1

Calcula el área y el volumen del cuerpo de la figura 1. Para ello, se descompone el sólido en las formas simples.

Ten en cuenta que la superficie del cuerpo compuesto está formada por cinco caras del cubo y por las cuatro caras laterales de la pirámide cuadrangular.

Entonces para calcular el área se procede así:

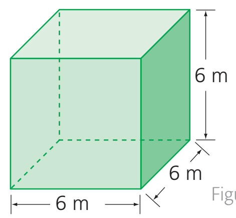


Figura 2

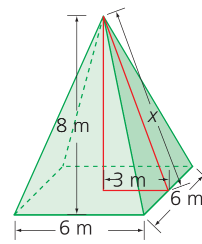


Figura 3

$A_1 = 5 \cdot 6^2 = 180 \text{ cm}^2$

$x = \sqrt{3^2 + 8^2} = \sqrt{73} \approx 8{,}54 \text{ cm}$

$A_2 = \dfrac{4 \cdot 6 \cdot 8{,}54}{2} \approx 102{,}48 \text{ cm}^2$

Por tanto, el área del cuerpo es la suma de las dos áreas.

$$A = A_1 + A_2 = 180 + 102{,}48 = 282{,}48 \text{ cm}^2$$

Ahora, se calcula el volumen total de la torre.

$V_{cubo} = A_{base} \cdot h = (6 \cdot 6) \cdot 6 = 216 \text{ m}^3$ $\quad V = \dfrac{1}{3} A_{base} \cdot h = \dfrac{1}{3} \cdot (6 \cdot 6) \cdot 8 = 96 \text{ m}^3$

Entonces, el volumen total es $216 \text{ m}^3 + 96 \text{ m}^3 = 312 \text{ m}^3$

Actividad resuelta

Ejercitación

1 Calcula el volumen del cuerpo de la figura 4.

Solución

El volumen de este cuerpo está compuesto por el volumen de una semiesfera y el volumen de un cono.

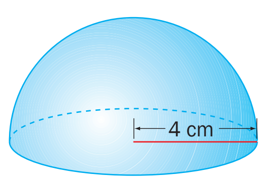


Figura 5

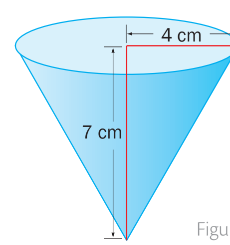


Figura 6

$V_1 = \dfrac{2}{3} \cdot \pi \cdot 4^3 = 134 \text{ cm}^3$ $\quad V_2 = \dfrac{\pi \cdot 4^2 \cdot 7}{3} = 117{,}2 \text{ cm}^3$

Por tanto, el volumen del cuerpo es la suma de los dos volúmenes.

$$V = V_1 + V_2 = 134 + 117{,}2 = 251{,}2 \text{ cm}^3$$

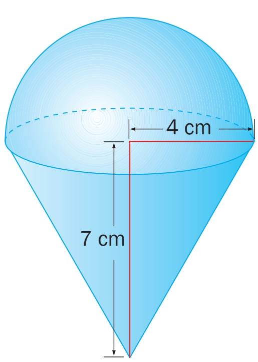


Figura 4

Destreza con criterios de desempeño: Resolver problemas que impliquen el cálculo de volúmenes de cuerpos compuestos (usando la descomposición de cuerpos).

Desarrolla tus destrezas

Razonamiento

2. Determina el área total y el volumen del cuerpo de la figura 7. Explica el procedimiento que seguiste.

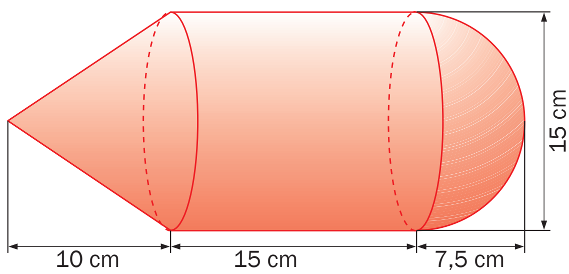


Figura 7

Comunicación

3. En la caja de la figura 8. se quieren guardar dos esferas macizas de 10 cm de radio. Calcula el volumen que ocupa el aire que queda en la caja. Escribe un paso a paso claro que le permita a otra persona encontrar el cálculo de este valor.

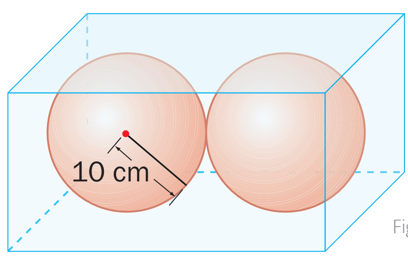


Figura 8

4. Halla el área y el volumen del siguiente cuerpo compuesto donde las medidas están en metros.

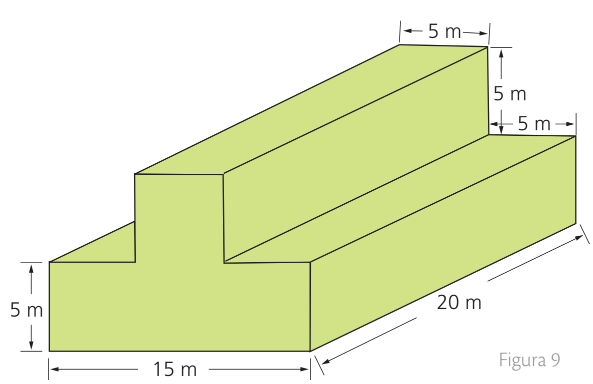


Figura 9

5. Halla el volumen de los siguientes cuerpos compuestos. Ten en cuenta que las medidas se dan en centímetros.

a.

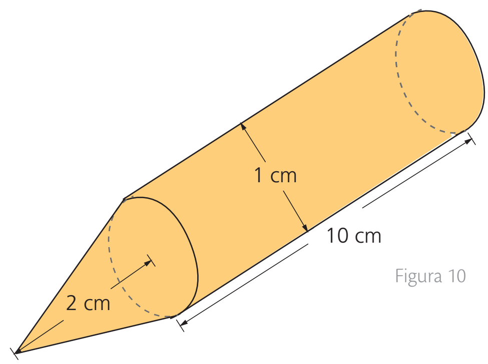


Figura 10

b.

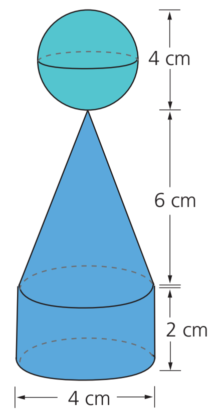


Figura 11

Resolución de problemas

6. En una fábrica elaboran una tuerca de forma hexagonal de 2 cm de lado y una altura de 2 cm. Además, se sabe que el cilindro central tiene un diámetro de 0,5 cm. ¿Cuál es el volumen que ocupa esta tuerca?

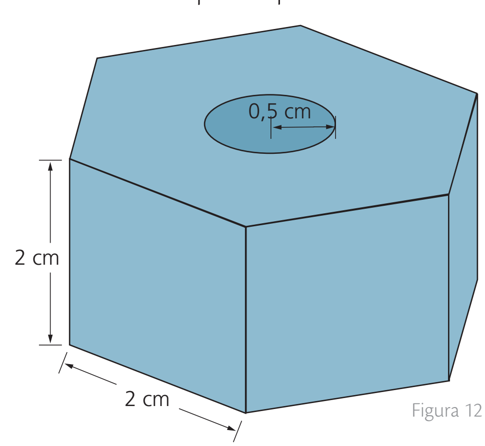


Figura 12

Prueba Ser Estudiante

A continuación se presentan ejercicios con cuatro alternativas de solución, de las cuales, una sola es la correcta. Señala en la tabla de respuestas, el literal que consideres correcto.

1. Una escalera alcanza una ventana situada a 3 m de altura formando un ángulo de 60º con el piso. ¿Cuál es la longitud de la escalera?

A. 3,5m aproximadamente

B. 4,5m aproximadamente

C. 2,5m aproximadamente

D. 1,5m aproximadamente

2. Si *a* es el cateto opuesto y *b* es el cateto adyacente, con respecto a un ángulo α de un triángulo rectánglo, la razón $\frac{a}{b}$ se denomina:

A. seno del ángulo α

B. coseno del ángulo α

C. tangente del ángulo α

D. cateto del ángulo α

3. Halla el senα si se sabe que la tangente del ángulo agudo α es igual a $\frac{4}{3}$.

A. $\frac{2}{5}$

B. $\frac{1}{5}$

C. $\frac{3}{5}$

D. $\frac{4}{5}$

4. El resultado de la expresión $(\text{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha) + (\text{sen}^2\alpha - \cos^2\alpha)$ simplificada es:

A. $\cos^2\alpha$ **B.** $2\text{sen}^2\alpha$

C. $2\cos^2\alpha$ **D.** $\text{sen}^2\alpha$

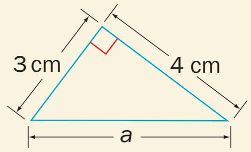
5. Si se aplica el teorema de Pitágoras, el lado desconocido del siguiente triángulo es:

A. *a* = 12 cm

B. *a* = 7 cm

C. *a* = 5 cm

D. *a* = 10 cm



6. Si la hipotenusa de un triángulo rectángulo mide 9 cm y un cateto mide 3 cm, ¿cuál es la medida del otro cateto?

A. $2\sqrt{6}$ cm

B. $6\sqrt{3}$ cm

C. $6\sqrt{2}$ cm

D. $3\sqrt{6}$ cm

7. Determina la medida de la altura sobre el lado desigual de un triángulo isósceles, si dicho lado mide 16 m, y se sabe que el ángulo desigual es de 80º:

A. 8,52 m

B. 7,48 m

C. 9,53 m

D. 6,55 m

8. Un avión de combate localiza un barco enemigo con un ángulo de depresión de 28º. Si el avión vuela a 3 200 m de altura, ¿cuál es la distancia a la que se encuentra el barco

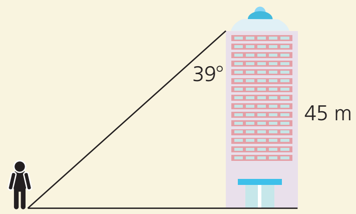
A. 6 816,17 m

B. 5 622,24 m

C. 3 264,22 m

D. 7 426,22 m

9. La distancia entre el edificio de la figura y el peatón que se encuentra a la izquierda es:



A. 36,44 m

B. 32,24 m

C. 33,41 m

D. 36,22 m

Indicadores de logro:

- Aplica el teorema de Pitágoras en la resolución de ejercicios o situaciones reales relacionadas a triángulos rectángulos.
- Reconoce y aplica las razones trigonométricas y sus relaciones en la resolución de triángulos rectángulos y en situaciones problema de la vida real.
- Resuelve problemas geométricos que requieran del cálculo de áreas de polígonos regulares, áreas y volúmenes de pirámides, prismas, conos y cilindros, aplica como estrategia de solución la descomposición en triángulos y/o la de cuerpos geométricos, realiza los procesos de solución empleando la construcción de polígonos regulares y cuerpos geométricos; juzga la validez de resultados.

10. Calcula el área de un triángulo rectángulo, si las proyecciones de sus catetos sobre la hipotenusa miden 14,4 cm y 25,6 cm, respectivamente.

A. 582 cm^2

B. 275 cm^2

C. 473 cm^2

D. 384 cm^2

11. La fórmula del volumen de una pirámide es:

A. $V = A_B h$ B. $V = \frac{A_B h}{3}$

C. $V = \frac{\pi r^2 h}{3}$ D. $V = \pi r^2 h$

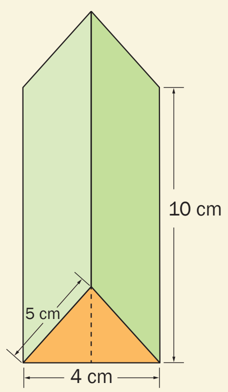
12. ¿Cuál es el área total del sólido de la siguiente figura?

A. 158,33 cm^2

B. 138,33 cm^2

C. 148,33 cm^2

D. 128,33 cm^2



13. ¿Cuánto papel de regalo se necesita para envolver una caja de 9,5 cm de ancho, 2 cm de largo y 3 cm de profundidad?

A. 132 cm^2

B. 124 cm^2

C. 107 cm^2

D. 116 cm^2

14. El volumen de un cono cuya base tiene un radio de 21 cm y cuya altura es de 28 cm es:

A. 1 116 π dm^3

B. 3 225 cm^3

C. 4 116 π cm^3

D. 2 234 cm^3

15. El área de una pirámide de altura 8 cm, con base pentagonal regular de 6 cm de lado y de apotema igual a 1 cm es:

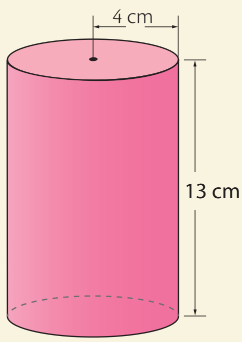
A. 132,92 cm^2

B. 137,91 cm^2

C. 133,90 cm^2

D. 135,93 cm^2

16 El área total del cuerpo de la siguiente figura es:



A. 136 π cm^2

B. 116 π cm^2

C. 126 π cm^2

D. 106 π cm^2

Tabla de respuestas

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A
B	B	B	B	B	B	B	B	B	B	B	B	B	B	B	B
C	C	C	C	C	C	C	C	C	C	C	C	C	C	C	C
D	D	D	D	D	D	D	D	D	D	D	D	D	D	D	D

La bolsa... un mercado de valores

Un mercado de valores es un mercado público para la compra y venta de acciones de las compañías y sus derivados a un precio convenido.

El mercado de valores es más conocido con el nombre de "bolsa" y puede definirse como un conjunto de instituciones y agentes financieros que negocian los distintos tipos de activos (acciones, fondos, obligaciones, etc.) mediante instrumentos creados específicamente para ello.



Su objetivo fundamental

Captar parte del ahorro personal y empresarial para conseguir un punto de financiación extra para las empresas, como ocurre por ejemplo en la emisión de nuevas acciones.

El uso de unos mercados de valores, democráticamente definidos, ayuda al desarrollo de políticas monetarias más activas y seguras.



¿Quiénes participan?

Básicamente los que participan en la operación de las bolsas son:



- Los demandantes de capital, que son las empresas o emisores que buscan financiamiento para sus proyectos.
- Los oferentes de capital, es decir, personas, sociedades o empresas que desean invertir.
- Los intermediarios de esta negociación llamados comisionistas.

Para saber...

En la bolsa de valores, de manera complementaria a la economía de los países, se intenta satisfacer tres grandes intereses:

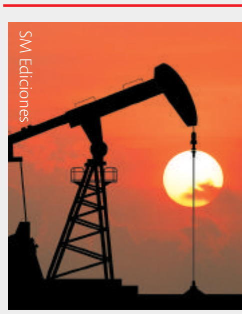
1. El de las empresas, pues al poner sus acciones en el mercado y ser adquiridas por el público, obtienen el financiamiento necesario para cumplir sus fines y generar riqueza.
2. El de los ahorradores, porque se convierten en inversionistas y pueden beneficiarse con su participación.
3. El del Estado porque, al estar en la bolsa, dispone de un medio para financiarse y hacer frente al gasto público, así como de adelantar nuevas obras y programas de alcance social.

Desarrolla tus destrezas

Planeación económica y financiera

1. Lee sobre una empresa que en este texto se ha creado para entender, cómo una compañía es parte de la bolsa de valores.

2. Investiga sobre la historia de Avianca, la primera aerolínea comercial fundada en América y la segunda en el mundo. Luego, prepara un informe con lo que investigaste.



Supongamos que Ecuapetrol S. A. es una de las empresas más grandes del país y la principal compañía petrolera en Ecuador. Por su tamaño, Ecuapetrol S. A. pertenece al grupo de las 39 petroleras más grandes del mundo y es una de las cinco principales de Latinoamérica. Cuenta con campos de extracción de hidrocarburos en el centro, el sur, el oriente y el norte de Ecuador, dos refinerías, puertos para exportación e importación de combustibles y crudos en la costa y una red de transporte de 8 500 kilómetros de oleoductos y poliductos a lo largo de toda la geografía nacional.

¿Qué es un valor?

A diferencia de cuando se ahorra en el banco depositando dinero, en el mercado de valores lo que se hace es invertir (comprar algo para venderlo después) y al invertir lo que se adquiere es un "valor".

Los valores eran papeles que solían llamarse "títulos" y tenían un valor por lo que representaban (una casa, un pagaré, mercancías, dinero, entre otros) y podían ser intercambiados con otras personas por dinero u otros valores.

Actualmente, los valores no son papeles sino que se han convertido en anotaciones reguladas por entidades que registran quién es el dueño de una cantidad de títulos, pero de la misma manera dichos títulos se siguen comprando y vendiendo.



Las acciones son un tipo de valor que representa una parte de una empresa; así, el comprador de acciones se convierte en socio y participa tanto de las ganancias como de las pérdidas de la empresa.

¿Cómo funciona la bolsa?

Para que una empresa pueda vender acciones que emite (esto hace que se denomine "emisora") debe estar inscrita en la bolsa de valores.

Las acciones de una empresa, ofrecidas en la bolsa de valores, pueden ser adquiridas por una persona natural o por otra empresa por intermedio de un ente denominado corredor de bolsa. El vendedor selecciona a un "corredor" y le encomienda que ofrezca las acciones y el comprador también selecciona a un "corredor" para que ofrezca comprarlas.



Pregunta tipo Saber

Cierta empresa de servicios ha puesto en venta algunas de sus acciones. Cada acción cuesta $ 23,5 y el pronóstico de rentabilidad es del 25% mensual.



Con esta información es válido afirmar lo siguiente:

A. Si una persona compra 145 acciones es probable que reciba alrededor de $ 900 de dividendos.

B. Si una persona compra 145 acciones recibirá $ 4 260 cuando las venda.

C. Si una persona invierte $ 4 260 ha comprado 145 acciones.

D. Si una persona decide invertir entonces ganará el 25 % de lo que invierta.

Desarrolla tus destrezas

Trabajo en grupo

3 A continuación se presenta una gráfica que muestra la evolución en el precio de las acciones de Ecuapetrol.



4 Analicen el comportamiento del precio desde el 2007 hasta el 2011.

a. Determinen con qué valor inició la acción y año tras año describe su comportamiento, destacando si el precio subió o bajó.

b. Calculen en qué porcentaje subió o bajó en los periodos de tiempo mostrados.

c. Analicen el caso de alguien que compró 1 500 acciones en mayo del 2010; determinen cuáles han sido sus dividendos.

Habilidades digitales

Argumenta tu posición frente a una temática en un foro virtual

Comunicar tus argumentos sobre una temática puede resultar interesante en un foro virtual, es decir, un espacio en línea en el cual un grupo de personas debaten y discuten sobre un tema académico o social. En este taller aprenderás a abrir un foro virtual y a establecer un tema de discusión.

1 Planifica el foro virtual y el tema de la discusión

a. Piensa en un nombre apropiado y llamativo para un foro virtual sobre estadística, y otro para el primer tema de debate.

b. Busca información en internet relacionada con la aplicación de la estadística en los campos laboral o académico, pueden ser documentos, videos o imágenes.

c. Escribe un texto argumentativo que te permita presentar el tema de discusión, promover el debate y motivar a tus compañeros a participar. Cita autores que te ayuden a apoyar tus argumentos.

2 Crea un foro virtual gratuito

a. Ve a la dirección www.creatuforo.com.

b. Haz clic en el ícono *Crear mi foro gratis*.

c. Diligencia el formulario.

Datos de la cuenta

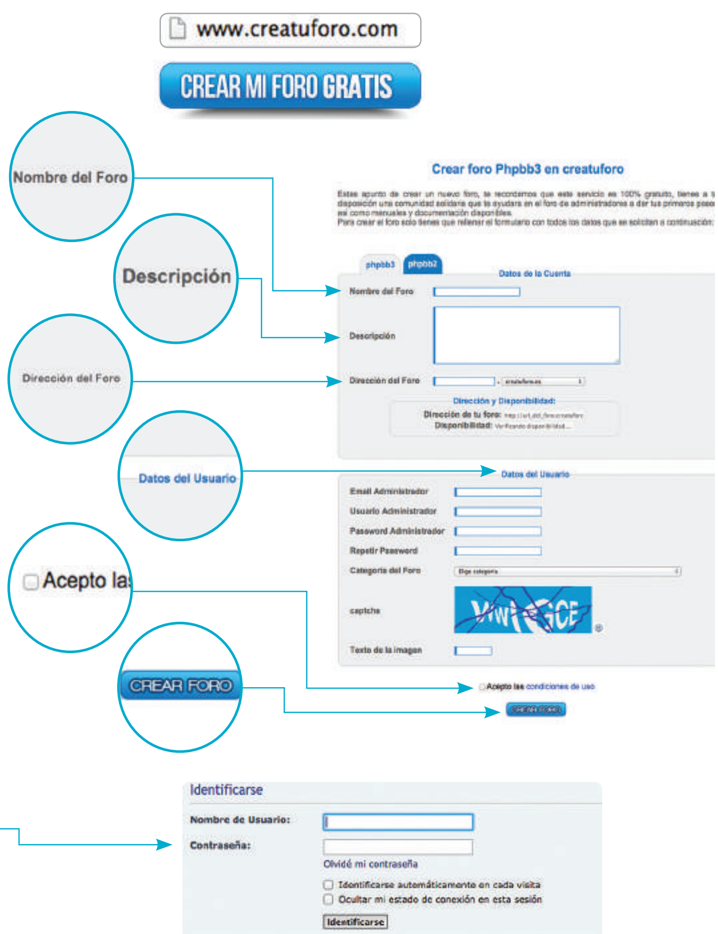
- Nombre del foro, puede ser el nombre de la asignatura.
- Descripción general de los temas de discusión relacionados con la temática del foro.
- Dirección electrónica de tu foro. El sistema te indicará si está disponible o no el nombre.

Datos del usuario

- Correo electrónico del administrador del foro
- Nombre de usuario del administrador del foro
- Contraseña
- Confirmación de la contraseña
- Categoría del foro, la puedes elegir según la temática.

d. Acepta las condiciones de uso del sitio y luego oprime el ícono *Crear foro*.

e. Diligencia estos datos para ingresar.



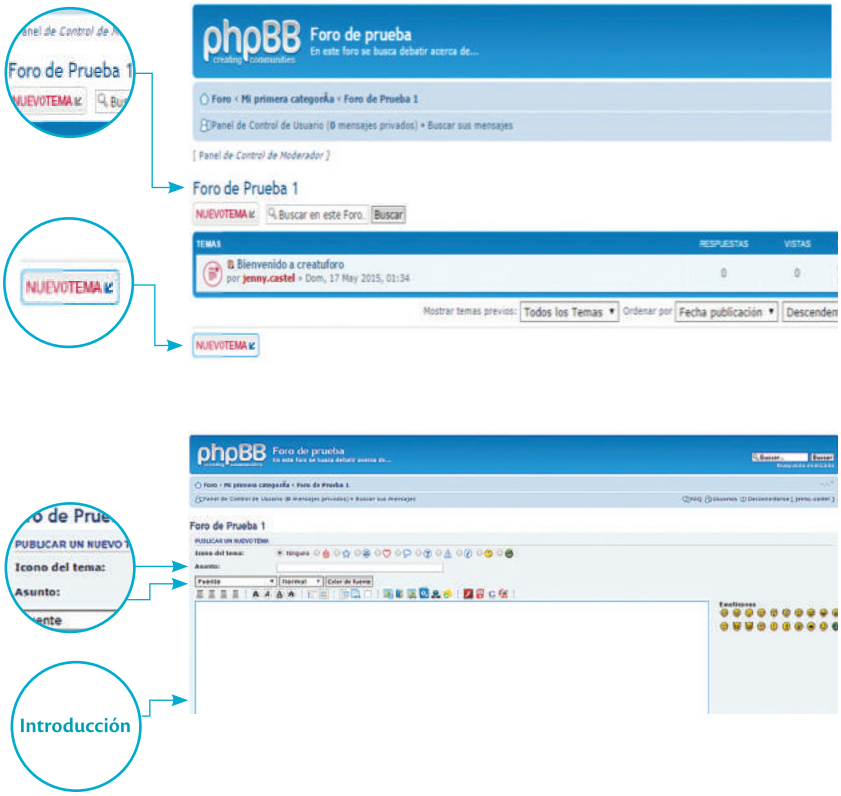
3 Crea un tema de discusión en el foro virtual

a. Haz clic en el nombre del foro.

b. Luego selecciona el ícono *Nuevo tema*.

c. Edita el tema de la discusión.

- Selecciona un ícono para tu tema de debate
- Asígnale un nombre, según la planificación del paso 1.
- Escribe una introducción que genere polémica o controversia. Motiva a los invitados a participar con actitud crítica, pero sin irrespetar las opiniones de los demás participantes.



Aprende más

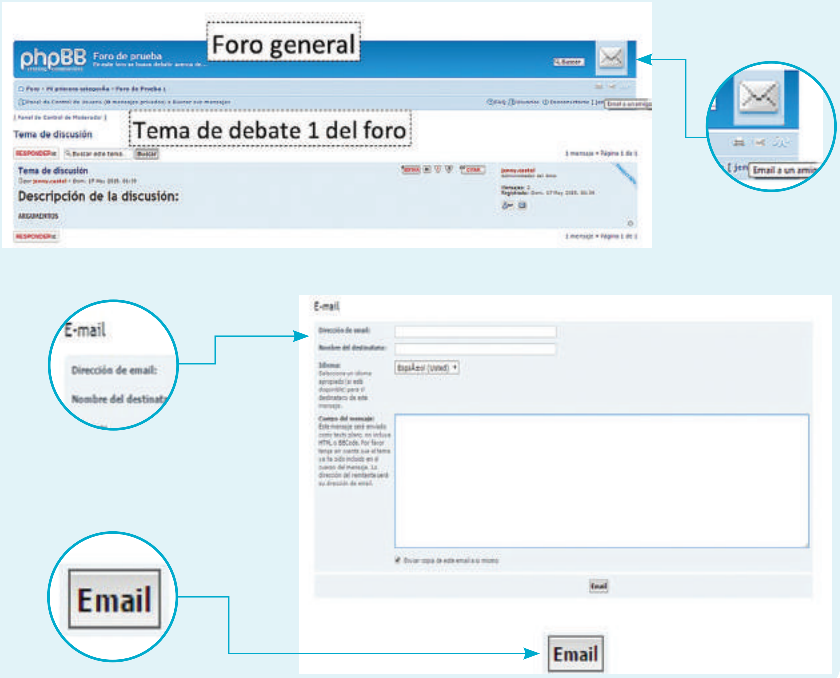
Invita a tus compañeros a participar en el tema de discusión del foro virtual.

a. Haz clic sobre el ícono de mensaje.

b. Escribe el correo de los destinatarios, el asunto del mensaje y un párrafo invitando a tus compañeros a participar en el tema de discusión.

c. Haz clic en el botón.

d. Ingresa al foro virtual periódicamente para hacer seguimiento del debate y moderar las participaciones de tus compañeros.



Evaluación de la unidad

Medida de ángulos

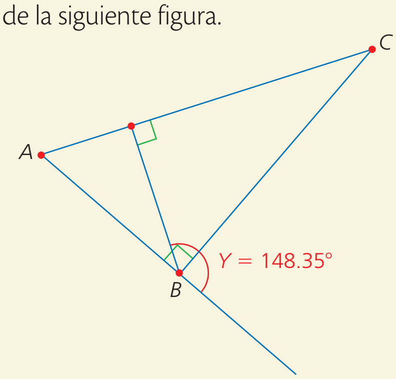
Razonamiento

1. Relaciona de manera correcta las expresiones equivalentes de las dos columnas.

a. $125°12'36''$	• $125{,}5°$
b. $\frac{31\pi}{45}$	• $124°$
c. $125°$	• $125{,}21°$
d. $\frac{251\pi}{360}$	• $125°3'$
e. $125{,}05°$	• $\frac{25\pi}{36}$

Ejercitación

2. Calcula las medidas de los ángulos internos del triángulo *ABC* de la siguiente figura.

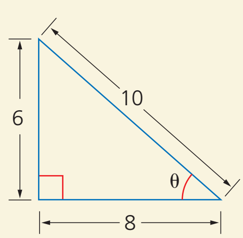


Razones trigonométricas en triángulos rectángulos

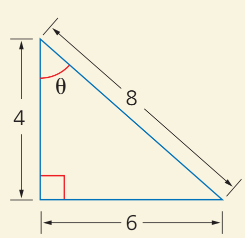
Razonamiento

3. Establece cuál triángulo permite obtener la razón trigonométrica $\tan\theta = \frac{3}{4}$.

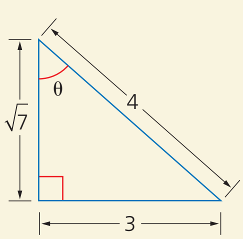
a.



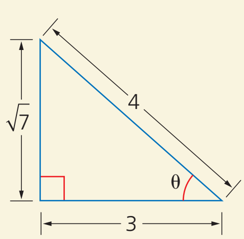
b.



c.



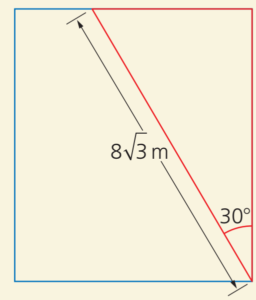
d.



Razones trigonométricas de ángulos especiales

Resolución de problemas

4. Un arquitecto asigna parte de un terreno rectangular para la construcción de una zona verde. Determina el área de la zona asignada.



Relaciones entre las razones trigonométricas

Razonamiento

5. Selecciona la razón $\operatorname{sen}\alpha$, si en un triángulo rectángulo $\cos\alpha = \frac{4}{5}$, siendo α uno de sus ángulos agudos.

a. $\operatorname{sen}\alpha = \frac{5}{4}$ b. $\operatorname{sen}\alpha = \frac{9}{5}$

c. $\operatorname{sen}\alpha = \frac{3}{5}$ d. $\operatorname{sen}\alpha = \frac{3}{4}$

Razones trigonométricas de un ángulo cualquiera

Modelación

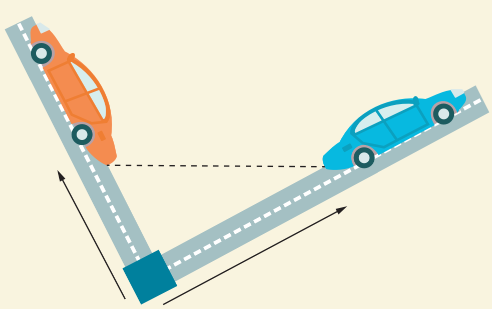
6. Completa la tabla, si $\pi \leq \beta \leq \frac{3\pi}{2}$ y $\operatorname{sen}\beta = \frac{4}{7}$.

$\cos\beta$	$\tan\beta$	$\cos(180 - \beta)$

Teorema de Pitágoras

Resolución de problemas

7. Dos vehículos parten de un mismo punto a velocidades constantes en direcciones perpendiculares. Uno viaja a 55 km/h y el otro a 63 km/h. Después de 30 minutos a ¿qué distancia estará el uno del otro?



Indicadores de logro:

- Aplica el teorema de Pitágoras en la resolución de ejercicios o situaciones reales relacionadas a triángulos rectángulos.
- Reconoce y aplica las razones trigonométricas y sus relaciones en la resolución de triángulos rectángulos y en situaciones problema de la vida real.
- Resuelve problemas geométricos que requieran del cálculo de áreas de polígonos regulares, áreas y volúmenes de pirámides, prismas, conos y cilindros, aplica como estrategia de solución la descomposición en triángulos y/o la de cuerpos geométricos, realiza los procesos de solución empleando la construcción de polígonos regulares y cuerpos geométricos; juzga la validez de resultados.

Resolución de triángulos rectángulos

Razonamiento

8. Determina si es posible construir un triángulo rectángulo con las longitudes de los siguientes tres segmentos.

$m\overline{AB} = 15$ cm, $m\overline{CD} = 4$ cm, y $m\overline{EF} = 5$ cm.

Explica tu respuesta.

9. Establece si la afirmación es verdadera (V) o falsa (F) a partir de la siguiente información.

En un triángulo rectángulo isósceles, la hipotenusa mide 1 m y los ángulos α y β son agudos.

a. $\alpha = \beta$ ( )

b. $\text{sen}\,\alpha \neq \text{sen}\,\beta$ ( )

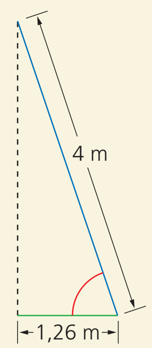
c. $\tan\beta = \frac{\sqrt{2}}{2}$ ( )

d. La medida de los catetos es $\frac{\sqrt{2}}{2}$ m ( )

e. $\text{sen}\,\alpha = \cos\beta$ ( )

Resolución de problemas

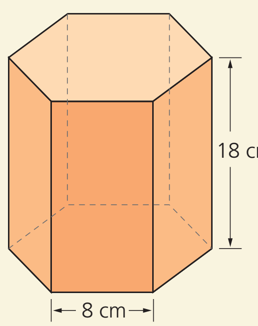
10. Una escalera de 4 m de altura se apoya en un muro vertical, como se observa en la figura. Determina la altura del muro y el ángulo que forma la escalera con la horizontal.



Longitudes y áreas de figuras planas. Áreas y volúmenes de cuerpos geométricos

Razonamiento

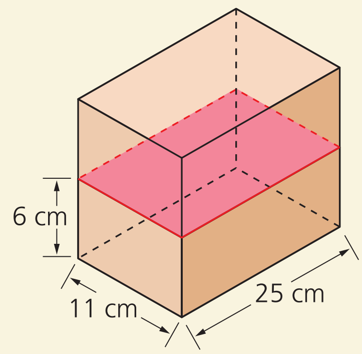
11. Determina la cantidad de cartón que se utilizó para construir una caja como la que se ilustra en la figura.



Resolución de problemas

12. El principio de Arquímedes permite calcular el volumen de un sólido irregular. Según el principio, el volumen de un cuerpo es igual al volumen del líquido desplazado al sumergir el sólido en él.

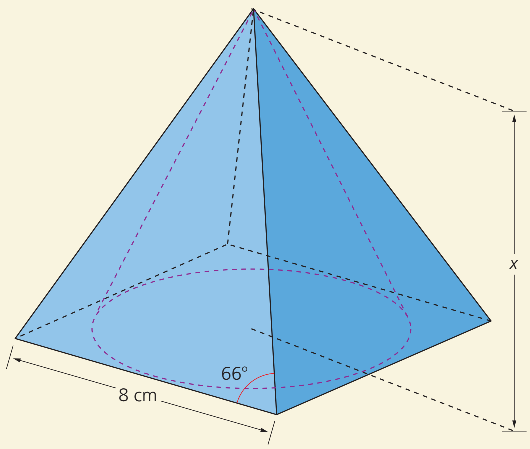
Si se cuenta con un recipiente con agua, como el de la figura, al sumergir un objeto el nivel del agua subió 1,5 cm, ¿cuál es el volumen del objeto?



Problemas de cálculo de áreas y volúmenes de cuerpos geométricos

Razonamiento

13. Encuentra el volumen comprendido entre la pirámide de base cuadrada y un cono que se construye a partir de una circunferencia inscrita en la base de la pirámide. Ten en cuenta que las caras laterales son triángulos isósceles.



6 Estadística y probabilidad

BLOQUE

Estadística y probabilidad

Mediante la estadística se puede obtener información de una colección de observaciones a través de resúmenes numéricos, como la media, la mediana, la desviación típica o el coeficiente de variación. Estas medidas permiten estudiar variables como la evolución de indicadores (el IPC, por ejemplo), la aceptación de un producto o la opinión de los ciudadanos sobre asuntos de actualidad, etc.

- Nombra tres utilidades de los estudios estadísticos en el campo de la economía.



Cultura del Buen Vivir

La equidad

Entre las características de la equidad se encuentran la justicia y la igualdad de oportunidades para todos los seres humanos, más allá de su género o su condición social.

- Nombra tres situaciones en las cuales es imprescindible que exista la equidad.

Aprenderás...

- Terminología estadística
- Medidas de tendencia central y de dispersión
- Técnicas de conteo

Resolución de problemas

Recursos digitales

LTIC

AI

E



SM Ediciones

Habilidades lectoras

El récord de los récords

El matemático holandés John Einmahl, de la Universidad de Tilburgo, ha calculado el "récord definitivo" de catorce disciplinas atléticas; entre ellas los 100 m en categoría masculina, que él estima en 9,29 segundos apoyándose en la teoría de los valores extremos y en proyecciones estadísticas.

Einmahl no pretende predecir los récords posibles en un futuro lejano, sino, como dice expresamente en su estudio, los récords que podrían darse bajo las condiciones actuales. La base de los cálculos de Einmahl son las mejores marcas de 1 546 atletas masculinos y 1 024 atletas femeninas de élite de cada disciplina estudiada, que luego somete a complicadas elaboraciones matemáticas con ayuda de un computador. Los resultados le permiten no solo comparar los récords actuales con los teóricamente posibles, sino ver cuánto los separa de su nivel ideal.

Según los cálculos de Einmahl, la mejora del récord de maratón entre los hombres, que posee el etiope Haile Gebrselassie (2 h 04' 26") se ajusta mucho a la ideal, porque solo podría ser mejorado en 20 segundos. Entre las mujeres, en cambio, el récord de la británica Paula Radcliffe, de 2 h 15' 25", podría ser claramente mejorado en 8 minutos y 50 segundos.

Curiosamente en las pruebas de velocidad, en las que se cree que se está muy cerca del límite de lo humanamente posible, los cálculos de Einmahl apuntan a posibles mejoras. El récord de los 100 metros podría ser reducido de los 9,74 segundos, que ostenta Asafa Powell, a 9,29; mientras que el de 200 metros en manos de Michael Johnson, con 19,32 segundos, está casi un segundo por encima de lo posible.

Sm Ediciones. (2016). Colombia. Matemática 10.

Actividades

Interpreta

1. ¿Cuál fue el conjunto de datos que utilizó Einmahl para hacer su estudio?

Argumenta

2. ¿Cómo crees que llevó a cabo su estudio el matemático John Einmahl?
3. ¿Cuáles elementos estadísticos necesitó?

Propón

4. ¿Cuáles crees que son las condiciones actuales a las que se refiere Einmahl? Menciona algunos ejemplos.

1 Terminología estadística

Explora

Se quiere hacer un estudio estadístico encuestando a los 240 estudiantes de décimo grado de un colegio. Para ello, se les preguntó a 40 estudiantes al azar lo siguiente:


educacion.gob.ec

a. País de origen
b. Número de hermanos
c. Distancia, en kilómetros, de su casa al colegio

- Identifica los elementos estadísticos que intervienen en este estudio.

Ten en cuenta

La medición de las variables puede realizarse por medio de cuatro escalas de medición. Dos de las escalas miden variables categóricas y las otras dos miden variables numéricas (Therese L. Baker, 1997). Los niveles de medición son las **escalas nominal, ordinal, de intervalo y de razón.** Se utilizan para ayudar en la clasificación de las variables, el diseño de las preguntas para medir variables, e incluso indican el tipo de análisis estadístico apropiado para el tratamiento de los datos.

Ten en cuenta

En un **estudio estadístico**, los elementos o individuos de la muestra deben elegirse de forma **aleatoria**, es decir:

- Deben tener la misma probabilidad de ser elegidos.
- Cada tipo de elementos debe estar presente en la muestra y en la población en la misma proporción; por ejemplo, el número de hombres y de mujeres.

De acuerdo con los datos del Explora, los 240 estudiantes de décimo constituyen la **población estadística**, los 40 estudiantes elegidos para realizar la encuesta forman un subconjunto de la población que se denomina **muestra** estadística y los aspectos *país de origen, número de hermanos y distancia, en kilómetros, de su casa al colegio* corresponden a los **caracteres** o a las **variables estadísticas** estudiadas.

- El país de origen es una **variable estadística cualitativa** por ser una cualidad no medible que permite clasificar a los individuos.
- El número de hermanos es una **variable estadística cuantitativa**, ya que se trata de una magnitud medible.
- La distancia, en kilómetros, de su casa al colegio es una **variable estadística continua**, ya que puede tomar todos los valores posibles en un intervalo.

Una **variable estadística** es el conjunto de valores que toma un carácter estadístico cuantitativo. Puede ser de dos tipos:

- **Discreta**, cuando toma solamente valores aislados que se expresan mediante números naturales.
- **Continua**, cuando toma todos los valores posibles de un intervalo.

Ejemplo 1

En otro estudio, se analizan en la población de estudiantes del colegio: la estatura, la edad, el deporte que practica, la comida favorita, la cantidad de años en la institución, el peso y la profesión de los padres. Estos caracteres estadísticos pueden clasificarse como en la Tabla 1.

Caracteres cualitativos	deporte que practica, comida favorita y profesión de los padres
Caracteres cuantitativos	estatura, edad en años, cantidad de años en la institución y el peso

Tabla 1

La edad en años puede tomar, por ejemplo, los valores 12, 13, 14, etc. Como esta variable estadística solo puede tomar valores aislados que se expresan mediante números naturales, es una variable estadística discreta.

La estatura toma, por ejemplo, valores como: 1,28 cm, 1,56 cm, 1,36 cm, etc. Como esta variable puede tomar todos los valores de un intervalo, es una variable estadística continua.

Actividad resuelta

Razonamiento

1. Clasifica los siguientes caracteres estadísticos.

a. Número de personas que trabajan para defender los derechos humanos.
b. Actividad a la que dedican el tiempo libre los jóvenes de 14 a 16 años.
c. Volumen de agua contenida en los embalses de una provincia del país.

Solución:

a. Variable estadística discreta
b. Carácter estadístico cualitativo
c. Variable estadística continua

Destreza con criterios de desempeño: Definir y utilizar variables cualitativas y cuantitativas.
Definir niveles de medición: nominal, ordinal, intervalo y razón.

Desarrolla tus destrezas

Razonamiento

2 Indica si las siguientes variables son cualitativas o cuantitativas. Clasifica las variables cuantitativas según sean discretas o continuas.

a. Número de faltas de asistencia de los estudiantes de décimo en un mes.

b. Número de horas de productividad entre los trabajadores de una oficina.

c. Número de celulares que tienen los miembros de las familias de un edificio.

d. El color de pelo de los niños que se presentan a una audición musical.

e. El número de señales de pare que hay en poblaciones con menos de quinientos habitantes.

f. La cantidad de tornillos defectuosos en una hora de producción.

g. El número de reactivos contestados correctamente en una prueba estandarizada.

h. El tiempo necesario para contestar una llamada telefónica en un centro de llamadas.

i. Número de canastas en un partido de baloncesto.

j. Canal de televisión preferido por los habitantes de un conjunto residencial.

Comunicación

3 Lee y resuelve.

Supón que una persona te pide que le expliques la diferencia entre los términos “muestra” y “población”.

a. ¿Qué información debes incluir en tu respuesta?

b. ¿Qué razones le darías sobre por qué debe tomarse una muestra en vez de encuestar a todos los elementos de la población?

Modelación

4 Entrevista a diez estudiantes universitarios y recolecta datos para las siguientes tres variables:

X: número de materias en las que está inscrito

Y: costo total de los libros de texto semestrales

Z: método de pago para cancelar el valor del semestre

a. ¿Cuál es la población?

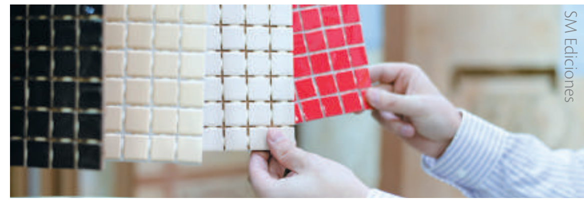
b. ¿Es la población infinita o finita?

c. ¿Cuál es la muestra?

d. Clasifica las respuestas para cada una de las tres variables según sean cuantitativas o cualitativas.

Resolución de problemas

5 En una empresa en la que se fabrican azulejos se quiere llevar a cabo un control de calidad de sus productos. Los responsables del estudio piden a un empleado que seleccione las muestras de azulejos, quien, al hacerlo, no elige los esperados.



En el control de calidad no se detectan piezas imperfectas y, sin embargo, la fábrica recibe más devoluciones de las esperadas. ¿Por qué crees que sucedió esto?

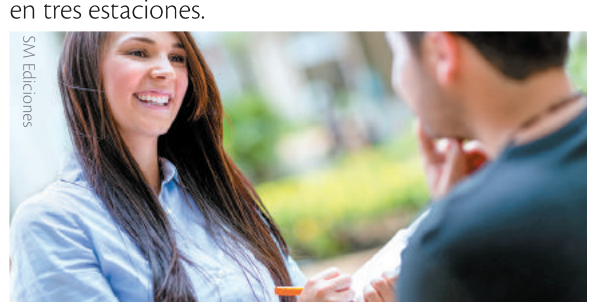
6 Para estimar la estatura media de los estudiantes de un colegio se selecciona al primer estudiante de la lista de cada uno de los cursos de la institución, se miden y se obtiene la media de estas medidas.

a. ¿Cuál es la población?

b. ¿Cuál es la muestra?

c. ¿Está la muestra bien seleccionada?

7 En una empresa de transporte público se quiere saber la opinión de los ciudadanos acerca del servicio que ofrece. Para ello, unos encuestadores realizan una serie de entrevistas a los viajeros que acceden a este servicio en tres estaciones.



a. ¿Cuál es la población?

b. ¿Cuál es la muestra?

c. Describe la variable implicada.

8 En la década de 1930, en una ciudad se hizo una encuesta telefónica para pronosticar el ganador de las siguientes elecciones presidenciales. El pronóstico fue que ganaría el candidato *A*, pero en realidad ganó el candidato *B*.

a. ¿Crees que la muestra elegida fue representativa? ¿Por qué?

b. ¿Cómo se debió seleccionar la muestra de manera que los datos fueran confiables?

2 Medidas de tendencia central

Explora

En la Tabla 1, se registró el número de llamadas diarias recibidas en cierta estación de bomberos durante la primera semana del año.

Día	Número de llamadas (x_i)
Lunes	12
Martes	16
Miércoles	31
Jueves	25
Viernes	34
Sábado	21
Domingo	19
	158

Tabla 1

- ¿Cuál fue el promedio de llamadas diarias recibidas durante esa semana en la estación?

2.1 Media aritmética



Para calcular el promedio o la media aritmética $\overline{x}$, de las llamadas recibidas en la estación de bomberos durante esa semana, se suman los datos y el resultado se divide por la cantidad total, N, de datos. Es decir:

$$\overline{x} = \frac{\sum x_i}{N} = \frac{158}{7} = 22{,}6.$$

Por lo tanto, el promedio de llamadas diarias recibidas durante esa semana fue, aproximadamente, 22,6 llamadas.

La **media aritmética,** $\overline{x}$, de una variable es el cociente entre la suma de todos los valores x_i de la misma y la cantidad total N de estos.

$$\overline{x} = \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{N} = \frac{\sum x_i}{N}$$

Ejemplo 1

Las notas de un estudiante de octavo semestre de economía son:

4,5 3,8 2,7 4,1.

El promedio de estas notas se halla sumando los cuatro valores y dividiendo este resultado entre la cantidad de datos. Esto es:

$$\overline{x} = \frac{4{,}5 + 3{,}8 + 2{,}7 + 4{,}1}{4} = \frac{15{,}1}{4} = 3{,}775$$

2.2 Media aritmética para datos agrupados

Para calcular la media aritmética de un conjunto de datos agrupados en clases, se determina el cociente de la suma de los productos de cada marca de clase x_i y su correspondiente frecuencia f_i dividido entre el total de los datos, N.

$$\overline{x} = \frac{\sum x_i f_i}{N}$$

Ejemplo 2



En un puesto de control de una autopista, se registraron las velocidades de algunos vehículos que transitaron durante cierto día de la semana. Observa la Tabla 2

Velocidad (km/h)	Número de vehículos (f_i)
[100, 110)	15
[110, 120)	35
[120, 130)	25
[130, 140)	10

Tabla 2

Ten en cuenta

La velocidad máxima permitida a la que pueden ir los vehículos livianos en una carretera, es de 100 km/h.

Para determinar el promedio de las velocidades:

- Primero, se calculan las marcas de clase o los puntos medios de los intervalos de clase.
- Luego, como se muestra en la Tabla 3, se multiplican por su respectiva frecuencia y se divide la suma de estos resultados entre el total de los datos.

Velocidad (km/h)	Marca de clase (x_i)	Número de vehículos (f_i)
[100, 110)	105	15
[110, 120)	115	35
[120, 130)	125	25
[130, 140)	135	10

Tabla 3

$$\overline{x} = \frac{105 \cdot 15 + 115 \cdot 35 + 125 \cdot 25 + 135 \cdot 10}{15 + 35 + 25 + 10} = \frac{10\,075}{85} = 118{,}5 \text{ km/h}$$

Destreza con criterios de desempeño: Calcular e interpretar las medidas de tendencia central (media, mediana, moda) de un conjunto de datos en la solución de problemas.

2.3 Moda

La **moda** (*Mo*) de una variable estadística es el valor de la variable que tiene mayor frecuencia absoluta.

Si los datos están agrupados en clases, se toma como valor aproximado de la moda la **marca de la clase modal**.

Una distribución puede tener una moda (**unimodal**), dos modas (**bimodal**), tres modas (**trimodal**), etc. Si todos los valores se repiten el mismo número de veces, se considera que la distribución no tiene moda.

Ejemplo 3

Tomás encuestó a sus compañeros de clase para determinar el tiempo, en minutos, que dedican a estudiar en casa y registró los datos en la Tabla 4.

Se observa que la clase con mayor frecuencia es [35, 45). Esta se denomina **clase modal** y significa que entre los compañeros de Tomás son más los que dedican entre 35 y 45 minutos a estudiar en casa.

2.4 Mediana

La **mediana** (*Me*) de una variable estadística es el valor de la variable tal que el número de valores menores que él es igual al número de valores mayores que él.

La mediana depende del orden de los datos y no de su valor.

Actividad resuelta

Comunicación

1. Calcula la mediana de la distribución de velocidades de la Tabla 5.

Solución:

En primer lugar, se agrega, en la tabla de distribución, una columna F_i con las frecuencias absolutas acumuladas (Tabla 6) y se calcula la mitad de los datos:

$$\frac{101}{2} = 50{,}5 \text{ vehículos}$$

Velocidad (km/h)	x_i	Número de vehículos f_i	Frecuencia absoluta acumulada F_i
[90, 100)	95	16	16
[100, 110)	105	15	31 < 50,5
[110, 120)	115	35	**66 > 50,5**
[120, 130)	125	25	91
[130, 140)	135	10	101
		101	

Tabla 6

La mediana coincide con la marca de clase de la clase mediana que, en este caso, es [110, 120), porque allí $F_i > 50{,}5$. Es decir,

$$Me = \frac{110 + 120}{2} = 115 \text{ km/h}.$$

CULTURA del Buen Vivir

La equidad

Tres amigas deciden ahorrar dinero para gastarlo a final de año en un viaje a Machala. Los aportes de cada una según sus posibilidades fueron: $540, $670 y $437.

- Si se reúne todo el dinero, ¿cuál es el promedio de dinero que le corresponde a cada una? ¿Crees que esta situación es un ejemplo de equidad? Justifica.

Tiempo (min)	Número de estudiantes
[15, 25)	3
[25, 35)	8
[35, 45)	10
[45, 55)	8
[55, 65)	8
[65, 75)	3

Tabla 4

Velocidades de los vehículos que transitan en una autopista		
Velocidad (km/h)	x_i	Número de vehículos f_i
[90, 100)	95	16
[100, 110)	105	15
[110, 120)	115	35
[120, 130)	125	25
[130, 140)	135	10
		101

Tabla 5

2 Medidas de tendencia central

MatemaTICS

Halla las medidas de tendencia central de un conjunto de datos con GeoGebra.

En GeoGebra pueden calcularse las medidas de tendencia central de un conjunto de datos cuantitativos escribiendo en la caja de CAS (Cálculo Simbólico) las palabras "**Mediana**", "**Moda**", "**Media**" junto con el conjunto de números separados por comas y dentro de corchetes.

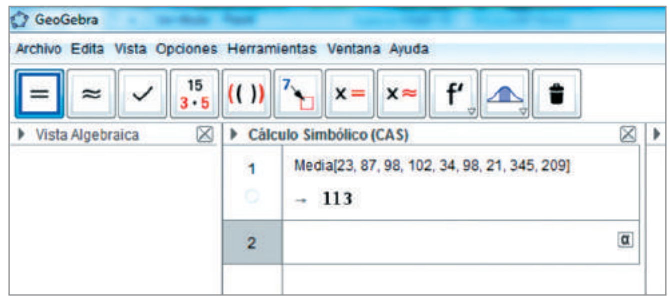
- Observa cómo se hallan las medidas de tendencia central de este conjunto de datos:

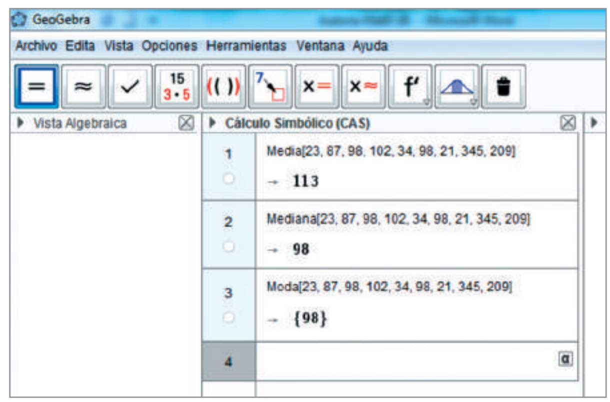
  {23, 87, 98, 102, 34, 98, 21, 345, 209}

↘ Para obtener la media se escribe en la barra de entrada o en CAS:
Media[23, 87, 98, 102, 34, 98, 21, 345, 209].

↘ Luego, se da enter en el teclado y el resultado aparece, como se muestra en esta imagen.

- Para hallar la mediana y la moda, se realizan pasos similares. Los resultados de este ejemplo en particular aparecerían en pantalla como se muestra en la imagen de la derecha.





Desarrolla tus destrezas

Ejercitación

2 Encuentra la media, la mediana y la moda para el conjunto de datos.

1, 3, 1, 4, 7, 5, 4, 3, 2, 2, 2, 6

Comunicación

3 Halla las medidas de tendencia central de los siguientes datos que corresponden al número de horas que durmieron quince personas la noche anterior.

5	6	6	8	7
7	9	5	4	8
11	6	7	8	7

4 Calcula la media, la mediana y la moda de la distribución estadística presentada en la Tabla 7.

x_i	2	3	4	5	6
f_i	11	17	23	24	15

Tabla 7

5 Lee y resuelve.

a. La cantidad de faltas de asistencia de los estudiantes de un curso a lo largo de un mes se consignaron en la Tabla 8.

Número de faltas	0	1	2	3	4	5
Número de estudiantes	10	7	6	2	1	4

Tabla 8

Encuentra las medidas de tendencia central de los datos de la tabla.

b. En la Tabla 9, se registraron las calificaciones obtenidas por 35 estudiantes de noveno grado en una prueba de matemáticas.

Puntaje	[0, 1)	[1, 2)	[2, 3)	[3, 4)	[4, 5)
Número de estudiantes	2	1	6	15	11

Tabla 9

Calcula la media, la moda y la mediana de los datos.

Destreza con criterios de desempeño: Calcular e interpretar las medidas de tendencia central (media, mediana, moda) de un conjunto de datos en la solución de problemas con el uso de la tecnología.

6 Corrige el error en el siguiente planteamiento.
Una persona del club que tiene 91 miembros se pasa al club que tiene 71 miembros. Un estudiante afirma que cambiarán todas las medidas de tendencia central.

7 Explica en qué casos coinciden la moda y la mediana.

8 Responde estas preguntas.

a. ¿Es posible que la media no coincida con ningún valor de la variable? ¿Esto es posible con la moda?

b. ¿Por qué en la Tabla 10 la mediana resulta poco significativa?

x_i	3	12	2 000
f_i	50	1	50

Tabla 10

c. Marco tiene un conjunto de datos con los siguientes valores: 92, 80, 88, 95 y *x*. Si el valor de la mediana de este conjunto es 88, ¿qué debe ser verdadero acerca de *x*? Explica tu respuesta.

Resolución de problemas

9 Al lanzar un dado 60 veces se registraron los siguientes resultados de menor a mayor.

1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
1	2	2	2	2	2	2	2	2	2
3	3	3	3	3	3	3	3	3	3
4	4	4	4	4	4	5	5	5	5
5	5	5	5	5	5	6	6	6	6
6	6	6	6	6	6	6	6	6	6

a. ¿Cuál es el resultado obtenido con mayor frecuencia?

b. ¿Cuál es el promedio de los resultados?

c. Si se lanza una vez más el dado, ¿cuál es el resultado más probable?

10 En una encuesta, se les preguntó a 16 personas acerca de su estado civil. Las respuestas fueron:

unión libre	casado	soltero	casado
soltero	casado	soltero	casado
unión libre	soltero	casado	casado
unión libre	casado	soltero	casado

¿Qué valor representa la moda de esa distribución?

11 En una encuesta sobre movilidad, se preguntó a 1 000 conductores acerca del número de multas recibidas que ha sido mayor o igual que 0 y menor o igual que 5. Al organizar los datos, un número desapareció, por lo que se dispone de la siguiente información:

Número de conductores		260	150	190	100	90
Número de multas	0	1	2	3	4	5

Tabla 11

a. ¿Cuál es el dato central de la distribución?

b. ¿Cuál es la moda de los datos?

c. ¿Cuál es el promedio de multas recibidas por los conductores encuestados?

12 Se registró el número de horas que 20 trabajadores dejaron de asistir a la oficina por problemas de salud el año pasado. Los datos obtenidos fueron estos:

0	3	4	8	10
12	12	15	15	17
19	21	21	23	25
26	32	33	40	60

a. ¿Cuál es el número de horas de absentismo laboral que ocurrió con mayor frecuencia?

b. ¿Cuál fue el promedio de horas no trabajadas en este grupo de personas?

13 Sofía obtuvo 153, 145, 148 y 166 puntos en cuatro juegos de bolos.

a. ¿Cuál es el puntaje promedio de Sofía?

b. ¿Cuál de las medidas debería usar Sofía para convencer a sus padres de que tiene suficiente destreza para entrar a una liga de bolos? Explica tu respuesta.

c. Sofía juega un juego más. Da un ejemplo de un puntaje que convencería a Sofía de usar una medida de tendencia central diferente para persuadir a sus padres. Explica tu respuesta.

3 Cuartiles

Explora

Se realizó un cuestionario de 80 preguntas a 60 personas y se obtuvieron los resultados de la Tabla 1.

Preguntas correctas	f_i
[20, 30)	8
[30, 40)	12
[40, 50)	16
[50, 60)	20
[60, 70)	4

Tabla 1

- ¿Determina el primer y tercer cuartiles de la distribución de las calificaciones?

En ocasiones es conveniente distribuir los datos estadísticos en cuatro partes iguales. Para ello se calculan tres valores que se llaman **cuartiles** y se representan por $\mathbf{Q_1}$, $\mathbf{Q_2}$ y $\mathbf{Q_3}$. El segundo cuartil coincide con la mediana.

En este caso, para hallar Q_1 y Q_3 se completan los datos, como en la Tabla 2, con las marcas de clase y las frecuencias absolutas acumuladas.

Preguntas correctas	x_i	f_i	F_i
[20, 30)	25	8	8
[30, 40)	35	12	20 > 15
[40, 50)	45	16	36
[50, 60)	55	20	56 > 45
[60, 70)	65	4	60

Tabla 2

$\mathbf{Q_1}$: La clase que contiene el primer cuartil es [30, 40), ya que su frecuencia acumulada excede por primera vez la cuarta parte de los datos, $\frac{60}{4} = 15$.

Así, el primer cuartil será la marca de la clase, es decir, $\mathbf{Q_1} = 35$.

$\mathbf{Q_3}$: La clase que contiene el tercer cuartil es [50, 60), ya que su frecuencia acumulada es la primera que excede las tres cuartas partes de los datos, $\frac{3}{4} \cdot 60 = \frac{180}{4} = 45$.

Por lo tanto, el tercer cuartil será la marca de la clase, es decir, $\mathbf{Q_3} = 55$.

El **primer cuartil**, $\mathbf{Q_1}$, deja a su izquierda la cuarta parte de la distribución.

El **segundo cuartil**, $\mathbf{Q_2}$, deja a su izquierda la mitad de la distribución; por lo tanto, coincide con la mediana, $\mathbf{Q_2} = \mathbf{\mathit{Me}}$.

El **tercer cuartil**, $\mathbf{Q_2}$, deja a su izquierda las tres cuartas partes de la distribución.

Actividad resuelta

Ejercitación

1 En la Tabla 3, se registró el número de flores en 40 plantas de un vivero.

a. ¿Cuál es el primer cuartil de la distribución? ¿Cómo se interpreta?

b. ¿Cuál es el tercer cuartil? ¿Cómo se interpreta?



x_i	f_i
3	9
4	12
5	11
6	8
	40

Tabla 3

Solución:

Se completa la información, como en la Tabla 4, con las frecuencias absolutas acumuladas para identificar cuál de ellas deja a su izquierda la cuarta parte de los datos y cuál deja a su izquierda las tres cuartas partes de los datos.

x_i	f_i	F_i
3	9	9
4	12	21 > 10
5	11	32 > 30
6	8	40
	40	

Tabla 4

- De acuerdo con la información, el primer cuartil es 4. Esto significa que menos de la cuarta parte de las flores tiene hasta cuatro pétalos.
- El tercer cuartil corresponde a 5. Lo cual se interpreta como que menos de las tres cuartas partes de las flores tiene hasta cinco pétalos.

Destreza con criterios de desempeño: Determinar las medidas de posición: cuartiles y percentiles para resolver problemas.

Desarrolla tus destrezas

Ejercitación

2 Encuentra los cuartiles Q_1, Q_2 y Q_3 para los siguientes conjuntos de datos.

a. 7, 6, 4, 8, 3, 2, 5, 3, 9, 2, 2, 1, 4, 7, 12, 5, 9, 6, 3, 5

b. 64, 65, 68, 67, 68, 67, 72, 74, 80, 74 68, 74, 68, 72, 68, 65, 72, 67, 68, 85

3 Calcula la mediana, Q_1 y Q_3 para cada distribución.

a.

x_i	f_i	F_i
[50, 60)	8	8
[60, 70)	10	18
[70, 80)	16	34
[80, 90)	14	48
[90, 100)	10	58
[100, 110)	5	63
[110, 120)	2	65

Tabla 5

b.

x_i	[0, 10)	[10, 20)	[20, 30)	[30, 40)
f_i	12	16	17	11

Tabla 6

Comunicación

4 Lee y resuelve.

En la Tabla 7 se registró el número de horas semanales que dedican al estudio los 30 estudiantes de noveno.

Número de horas	Número de estudiantes
[0, 4)	8
[4, 8)	10
[8, 12)	8
[12, 16)	4

Tabla 7

Halla la media, la moda, la mediana y los cuartiles Q_1 y Q_3 para esta distribución.

Modelación

5 Lee la información. Luego, realiza lo que se indica.

Los **percentiles** dividen los datos en 100 grupos con igual cantidad de datos. Esta medida da los valores correspondientes al 1 %, 2 %, 3 %... y 99 % de los datos.

Observa cómo se calcula el percentil 40 (P_{40}) de los datos de la distribución presentada en la Tabla 8.

Edades	x_i	f_i	F_i
[10, 20)	15	4	4
[20, 30)	25	10	14
[30, 40)	25	12	$26 > 20$
[40, 50)	45	14	40
[50, 60)	55	8	48
[60, 70)	65	2	50

Tabla 8

- Primero, se identifica la clase donde se encuentra el percentil buscado:

$\frac{kN}{100}$, con $k = 1, 2, 3..., 99$ y N el total de datos

$$\frac{40 \cdot 50}{100} = 20.$$

- Para calcular el percentil se utiliza esta fórmula:

$$P_k = L_i + \frac{\frac{k \cdot N}{100} - F_{i-1}}{f_i} \cdot a$$

L_i: límite inferior de la clase donde se encuentra el percentil

F_{i-1}: frecuencia acumulada anterior a la clase del percentil

a_i: amplitud de la clase

Por lo tanto:

$$P_{40} = 30 + \frac{20 - 14}{12} \cdot 10 = 35.$$

a. Halla P_{35}, P_{79} y P_{50} de la distribución anterior.

b. Explica por qué el percentil 50 coincide con la mediana de la distribución.

Resolución de problemas

6 A continuación se presentan las producciones de lúpulo, en libras, de una finca.

3,9 3,4 5,1 2,7 4,4 7,0 5,6 2,6 4,8
5,6 7,0 4,8 5,0 6,8 4,8 3,7 5,8 3,6

a. Encuentra Q_1 y Q_3 de los datos.

b. Encuentra P_{45} y P_{70}.

4 Medidas de dispersión

Explora

Las calificaciones de un grupo de diez estudiantes en un examen de estadística son las siguientes:



56	58	67	69	75
77	77	82	84	95

- ¿Cuál es el rango de estos datos?

4.1 Rango

La media, la mediana y la moda de un conjunto de datos, revelan parte de la información necesaria para analizarlos. Para comprender mejor el comportamiento de los datos, se puede determinar su dispersión o variabilidad. Las principales medidas de dispersión son el rango, la varianza y la desviación típica.

El **rango** es la diferencia entre el mayor valor y el menor valor de los datos.

En este caso, como los datos están ordenados de manera ascendente, se identifica fácilmente que el menor valor es 56 y el mayor, 95.

Por lo tanto, el rango de las notas es:

$$\text{Rango} = 95 - 56 = 39.$$

El **rango** de una distribución es la diferencia entre el mayor valor y el menor valor de la variable estadística. También se llama **recorrido**.

Ejemplo 1

En la Tabla 1, se representa el número de libros que se venden cada día en una librería a lo largo de un mes.

Número de libros	12	17	21	27	35	37	49
f_i	5	3	6	8	4	3	1

Tabla 1

La cantidad de ejemplares vendidos varía desde los 12 hasta los 49, por lo que se dice que el rango de esta distribución es:

$$\text{Rango} = 49 - 12 = 37 \text{ libros.}$$

4.2 Varianza

Antes de estudiar el concepto de varianza, es necesario definir la **desviación respecto a la media**.

Se conoce como **desviación respecto a la media, d_i**, a la diferencia entre cada valor de la variable estadística, x_i, y la media aritmética, $\overline{x}$. Es decir:

$$d_i = x_i - \overline{x}.$$

Ejemplo 2

La media aritmética de los datos de la Tabla 1 es $\overline{x} = 25{,}1$ y las desviaciones respecto a la media se muestran en la Tabla 2.

Número de libros (x_i)	12	17	21	27	35	37	49
$d_i = x_i - \overline{x}$	−13,1	−8,1	−4,1	1,9	9,9	11,9	23,9

Tabla 2

La **varianza s^2** de una variable estadística x es la media aritmética de los cuadrados de las desviaciones respecto a la media. Para datos agrupados es:

$$s^2 = \frac{f_1(x_1 - \overline{x})^2 + f_2(x_2 - \overline{x})^2 + \ldots + f_n(x_n - \overline{x})^2}{f_1 + f_2 + \ldots + f_n} = \frac{\sum f_i(x_i - \overline{x})^2}{N}$$

Ten en cuenta

Cuando se calcula la varianza para datos no agrupados, se usa la fórmula:

$$s^2 = \frac{\sum (x_i - \overline{x})^2}{N}.$$

Destreza con criterios de desempeño: Calcular e interpretar las medidas de dispersión (rango, varianza y la desviación típica) de un conjunto de datos en la solución de problemas.

Ejemplo 3

La varianza de los datos consignados en la Tabla 1 es:

$$s^2 = \frac{\sum (x_i - \overline{x})^2}{N}$$

$$= \frac{(-13{,}1)^2 \cdot 5 + (-8{,}1)^2 \cdot 3 + (-4{,}1)^2 \cdot 6 + (1{,}9)^2 \cdot 8 + (9{,}9)^2 \cdot 4 + (11{,}9)^2 \cdot 3 + (23{,}9)^2 \cdot 1}{5 + 3 + 6 + 8 + 4 + 3 + 1}$$

$$= \frac{2\,572}{30} = 85{,}76$$

Ten en cuenta

Una expresión más sencilla para calcular la varianza es:

$$\frac{\sum x_i^2 f_i}{N} - \overline{x}^2.$$

4.3 Desviación típica

La **desviación típica *s*** es la raíz cuadrada positiva de la varianza.

Ejemplo 4

Las edades de los participantes de un concurso de literatura de un colegio se muestran en la Tabla 3. Para calcular la desviación típica de los datos, primero se calcula la media aritmética.

$$\overline{x} = \frac{13 \cdot 3 + 14 \cdot 4 + 15 \cdot 7 + 16 \cdot 10 + 17 \cdot 11 + 18 \cdot 8 + 19 \cdot 2}{45} = \frac{729}{45}$$

$$= 16{,}2 \text{ años}$$

Edad x_i	f_i
13	3
14	4
15	7
16	10
17	11
18	8
19	2
	45

Tabla 3

Luego, se completan los datos así, como en la Tabla 4:

1. En la tercera columna se calculan las desviaciones respecto a la media.
2. En la cuarta columna se calculan los cuadrados de los valores de las desviaciones respecto a la media.
3. En la quinta columna se halla el producto de los resultados de la cuarta columna con su respectiva frecuencia.

Edad x_i	f_i	$x_i - \overline{x}$	$(x_i - \overline{x})^2$	$(x_i - \overline{x})^2 f_i$
13	3	13 − 16,2 = −3,2	10,24	30,72
14	4	14 − 16,2 = −2,2	4,84	19,36
15	7	15 − 16,2 = −1,2	1,44	10,08
16	10	16 − 16,2 = −0,2	0,04	0,4
17	11	17 − 16,2 = 0,8	0,64	7,04
18	8	18 − 16,2 = 1,8	3,24	25,92
19	2	19 − 16,2 = 2,8	7,84	15,68
	45			

Tabla 4

Ahora, se halla la varianza:

$$s^2 = \frac{30{,}72 + 19{,}36 + 10{,}08 + 0{,}4 + 7{,}04 + 25{,}92 + 15{,}68}{45} = \frac{109{,}2}{45} = 2{,}42.$$

Y, por último, se calcula la desviación típica: $s = \sqrt{2{,}42} = 1{,}56$.

Ejemplo 5

Para hallar la desviación típica de un conjunto de datos cuya varianza es 172,7, basta con calcular:

$$\sqrt{s^2} = \sqrt{172{,}7} = 13{,}1.$$

Razonamiento matemático

¿Para qué sirve la desviación típica?

A dos grupos de personas se les encomienda realizar una encuesta sobre la misma variable. En el momento de analizar qué grupo de datos es el más confiable, se calcula la desviación típica y el valor menor es el que indica que grupo de datos representa mejor a la población encuestada.

- Investiga estudios estadísticos donde la desviación típica haya permitido analizar un conjunto de datos. Por ejemplo, en un censo poblacional.

4 Medidas de dispersión

4.4 Agrupación de datos en torno a la media aritmética

En distribuciones con una moda y simétricas se cumple que:

- En el **intervalo** ($\bar{x} - s, \bar{x} + s$) se encuentra el **68 % de los datos**.
- En el **intervalo** ($\bar{x} - 2s, \bar{x} + 2s$) se encuentra el **95 % de los datos**.
- En el **intervalo** ($\bar{x} - 3s, \bar{x} + 3s$) se encuentra el **99 % de los datos**.

Ten en cuenta

Un polígono de frecuencias se forma uniendo, con segmentos, los puntos medios de las barras de un histograma (que utiliza columnas verticales para mostrar frecuencias).

Ejemplo 6

Al medir las alturas, en centímetros, de 20 árboles se obtuvieron los datos presentados en la siguiente lista:

101	111	108	114	129	118	111	107	119	114
120	111	107	108	119	114	118	111	120	108

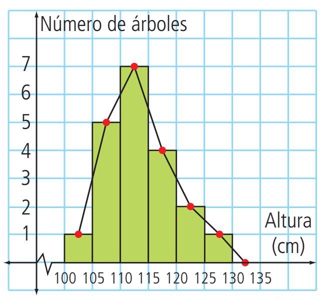


Figura 1

Representando el polígono de frecuencias de la Figura 1, se comprueba que la distribución es unimodal. Se calcula la media y la desviación típica:

$\bar{x} = 114$ cm $\qquad s = 7$ cm.

Luego, se halla el porcentaje de árboles con alturas en estos intervalos:

- $(\bar{x} - s, \bar{x} + s) = (107, 121)$. Hay 14 árboles, el 70 % del total.
- $(\bar{x} - 2s, \bar{x} + 2s) = (100, 128)$. Hay 19 árboles, el 95 % del total.
- $(\bar{x} - 3s, \bar{x} + 3s) = (93, 135)$. Hay 20 árboles, el 100 % del total.

4.5 Coeficiente de variación

El **coeficiente de variación *CV*** sirve para comparar la dispersión de distribuciones que tienen diferentes medias y distintas desviaciones típicas.

$$CV = \frac{s}{\bar{x}}$$

Actividades resueltas

Resolución de problemas

1 En la Tabla 5, se muestran la media y la desviación típica de las notas de Sara y Lucía. Calcula el coeficiente de variación de las calificaciones de cada una e interpreta los resultados.

	$\bar{x}$	s
Sara	8,5	1,3
Lucía	7,5	1,2

Tabla 5

Solución:

$CV_{Sara} = \frac{s}{\bar{x}} = \frac{1,3}{8,5} = 0,15 \qquad CV_{Lucía} = \frac{s}{\bar{x}} = \frac{1,2}{7,5} = 0,16$

Aunque la desviación típica de Sara es mayor, las calificaciones de Lucía son más dispersas pues es mayor el coeficiente de variación.

2 Los promedios de unidades de sombreros vendidas al mes en dos compañías *A* y *B* son 4 400 y 4 280, respectivamente. Si $s_A = 620$ y $s_B = 620$, ¿cuál de las compañías tuvo mayor variabilidad en las ventas?

Solución:

$CV_A = \frac{s}{\bar{x}} = \frac{620}{4\,400} = 0,1409 \qquad CV_B = \frac{s}{\bar{x}} = \frac{620}{4\,280} = 0,1449$

Por lo tanto, la mayor variabilidad se presentó en la compañía *B*.

Ten en cuenta

Las medidas de dispersión muestran la variabilidad de una distribución indicando por medio de un número si las diferentes puntuaciones de una variable están muy alejadas de la media. Cuanto mayor sea ese valor, mayor será la variabilidad, y cuanto menor sea, más homogénea será a la media.

Destreza con criterios de desempeño: Calcular e interpretar las medidas de dispersión de un conjunto de datos en la solución de problemas.

Desarrolla tus destrezas

Comunicación

3 Halla el porcentaje de datos incluidos en los intervalos $(\bar{x} - s, \bar{x} + s)$, $(\bar{x} - 2s, \bar{x} + 2s)$ y $(\bar{x} - 3s, \bar{x} + 3s)$ para la distribución de la Tabla 6.

x_i	[10, 20)	[20, 30)	[30, 40)	[40, 50)	[50, 60)
f_i	5	12	20	11	6

Tabla 6

Razonamiento

4 Ten en cuenta la información y resuelve.

Los porcentajes de uso del cinturón de seguridad en dos ciudades *A* y *B* durante cuatro días se muestran en la Tabla 7.

A	87	78	67	82
B	60	95	92	47

Tabla 7

Calcula el coeficiente de variación en cada ciudad e interpreta el resultado.

Resolución de problemas

5 En un colegio hay la siguiente cantidad de estudiantes:

- En grado sexto hay EGB 112 estudiantes.
- En grado séptimo EGB 123 estudiantes.
- En grado octavo EGB130 estudiantes.
- En grado noveno EGB 110 estudiantes.
- En grado décimo EGB hay 150 estudiantes.
- En grado primero BGU hay 146 estudiantes.

a. Elabora una tabla que contenga los anteriores datos.

b. Halla el rango.

c. Calcula la varianza y la desviación típica.

6 Se realizó un estudio sobre los meses de edad de un grupo de 124 bebés en el momento en que comenzaron a caminar. Los resultados están expresados en el histograma de la Figura 2.

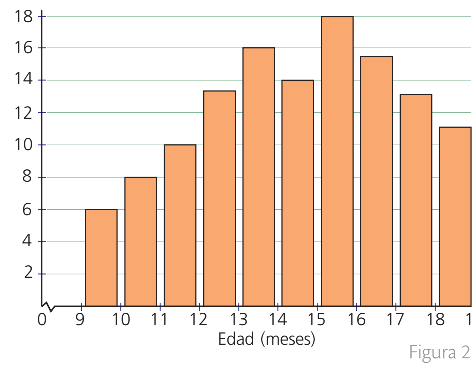


Figura 2

a. Elabora una tabla que contenga la información representada en el histograma.

b. Halla el rango.

c. Calcula la varianza y la desviación típica.

7 En los histogramas de las Figuras 3 y 4, se muestran los puntos anotados por dos jugadores de baloncesto a lo largo de un campeonato.

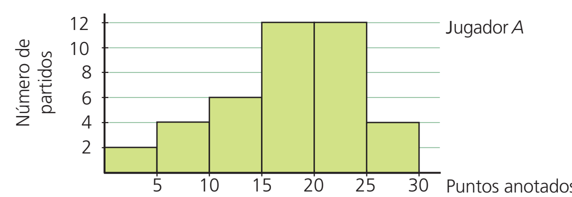


Figura 3

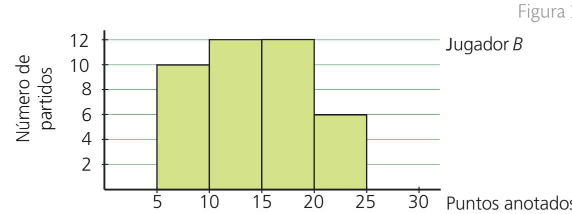


Figura 4

a. ¿Cuál de ellos alcanza mejor la media anotadora?

b. ¿Quién es más regular en su posición?

8 En la Tabla 8, se registró el número de goles que hicieron dos equipos de fútbol en ocho partidos del campeonato de esta temporada.

Equipo 1	25	24	27	24	26	25	27	24
Equipo 2	28	30	21	22	27	20	28	30

Tabla 8

Calcula el número medio de goles de cada uno de los equipos. ¿Cuál de ellos es más regular en su desempeño?

5 Diagrama de árbol

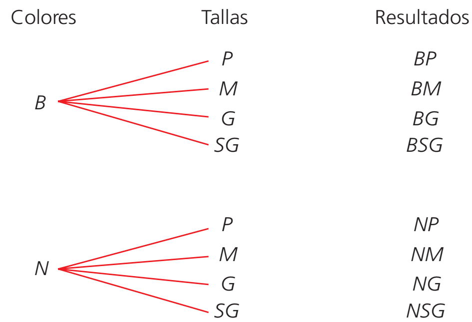
Explora

La dueña de un almacén de ropa deportiva encargó sudaderas de color blanco y negro en tallas pequeña, mediana, grande y extragrande.



- ¿Cuántos modelos de sudaderas recibirá cuando llegue el pedido?

Para determinar cuántos modelos de sudaderas recibirá la dueña del almacén, se representan los colores por *B* y *N* y las tallas por *P*, *M*, *G* y *SG*, y se construye un **diagrama de árbol** como el de la Figura 1.



Hay cuatro tallas para cada color; por tanto, se obtienen $2 \cdot 4 = 8$ modelos de sudaderas. Cada uno de los modelos corresponde a una rama del árbol.

Figura 1

El **diagrama de árbol**, conocido también como el principio general de recuento, consiste en que si un primer experimento puede hacerse de m formas diferentes y un segundo experimento puede hacerse de n formas diferentes, entonces los dos experimentos juntos pueden hacerse de $m \cdot n$ formas diferentes.

Actividades resueltas

Resolución de problemas

1 Un determinado automóvil se fabrica con dos tipos de motores: diésel y gasolina; en cinco colores: blanco, rojo, azul, verde y negro, y con tres acabados: básico, semilujo y lujo. ¿Cuántos modelos diferentes se construyen?

Solución:

Se representan los motores por *D* y *G*; los colores por *B*, *R*, *A*, *V* y *N*, y los acabados por *Ba*, *SL* y *L*.

Al formar el diagrama de árbol de la Figura 2, se observa que se construyen:

$$2 \cdot 5 \cdot 3 = 30 \text{ modelos diferentes.}$$

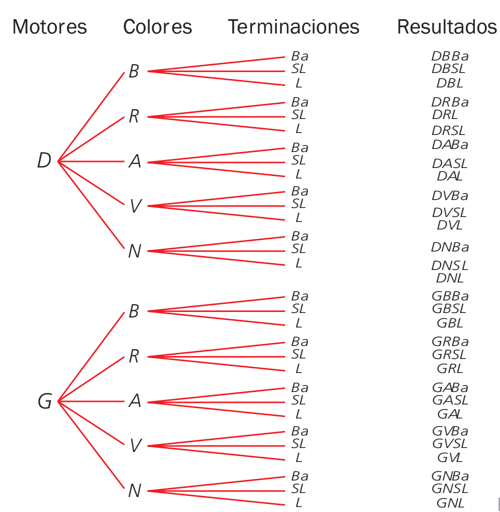


Figura 2

2 ¿Cuántos resultados diferentes se obtendrán si se lanzan tres dados cúbicos con las caras numeradas del 1 al 6?

Solución:

Como para cada dado hay seis posibles valores, el espacio muestral tendrá:

$$6 \cdot 6 \cdot 6 = 6^3 = 216 \text{ resultados diferentes.}$$

Destreza con criterios de desempeño: Elaborar diagramas de árbol de un conjunto de datos para la solución de problemas.

Desarrolla tus destrezas

Ejercitación

3 Elabora un diagrama de árbol para determinar lo que se indica en cada caso.

a. El número de maneras de combinar tres colores de medias con dos colores de zapatos.

b. Formas de seleccionar un menú, teniendo cuatro opciones de ensalada, tres de carnes, cinco de jugos y dos de postre.

c. Opciones para formar parejas de baile con cinco hombres y siete mujeres.

d. Formas de mezclar tres frutas con dos tipos de líquidos distintos.

Resolución de problemas

4 En el experimento de lanzar dos monedas y anotar si se obtiene cara o sello en cada una, ¿cuáles son los elementos del espacio muestral?

5 En una heladería se venden conos de tres sabores: vainilla, fresa y mango; y se les pueden adicionar salsa de mora, crema de leche o leche condensada.



Dibuja un diagrama de árbol. ¿Cuántos productos diferentes pueden escogerse?

6 Se lanzan al aire dos dados cúbicos con las caras numeradas del 1 al 6 y se anota el resultado de las caras superiores. Forma un diagrama de árbol. ¿Cuántos resultados diferentes pueden obtenerse?

7 El código de un candado consta de dos letras (*A* y *B*) y de dos números (1 y 2). Realiza el diagrama de árbol y calcula el número de códigos posibles.

8 Con las letras de la palabra "ROMA" se forman todas las palabras posibles de cuatro letras, tengan o no tengan sentido, sin repetir ninguna. ¿Cuántos resultados distintos pueden obtenerse?

9 De una urna que contiene una bola negra y otra roja, se extrae una bola y a la vez se lanza un dado cúbico y una moneda. Calcula el número de resultados posibles con un diagrama de árbol.

10 Se dispone de los colores rojo, verde, amarillo y negro para formar todas las banderas posibles con tres franjas verticales. Dibuja un diagrama de árbol que represente todas las banderas resultantes de tal manera que no se repitan colores en la misma bandera.

11 Los partidos de semifinales de una competencia de baloncesto son entre el equipo *A*, el equipo *B*, el equipo *C* y el equipo *D*.



Dibuja el diagrama de árbol correspondiente a las posibles finales.

12 En una organización se quiere elegir una nueva junta directiva. Para presidente hay tres candidatos: Julián, Gloria y Pablo; para secretario hay dos: Sara y Andrés, y para tesorero hay dos: Marco y Sofía. Representa en un diagrama de árbol todas las posibilidades de elección.

13 Una caja contiene tres bolas: una roja, una azul y una blanca. Dos de ellas se extraen con reemplazamiento, es decir, una vez se ha elegido una bola, se anota su color y luego vuelve a introducirse en la caja. Las bolas se revuelven antes de extraer una segunda bola y observar su color. ¿Cuáles son los posibles resultados?

14 Se lanzan dos dados (uno blanco y uno negro), uno a la vez, y se observa el número de puntos que se obtiene en cada lanzamiento. Elabora un diagrama de árbol donde se muestren las distintas combinaciones que pueden obtenerse.

15 Considera números de cinco cifras y responde las siguientes preguntas.

a. ¿Cuántos son capicúas?

b. ¿Cuántos son impares?

c. ¿Cuántos tienen las cinco cifras distintas?

d. ¿Cuántos son pares, capicúas y mayores que 50 000?

6 Permutaciones sin repetición

Yadira, Pamela y Raquel participan en una competencia de nado sincronizado en la categoría individual.



- ¿De cuántas maneras pueden clasificarse para recibir las medallas de oro, plata y bronce?

Para determinar de cuántas formas pueden clasificarse las tres participantes para recibir las medallas de oro, plata y bronce, se hace el siguiente análisis.

- Se representa a cada participante por la inicial de su nombre y se forma el diagrama de árbol de la Figura 1.
- Para el primer puesto, hay tres nadadoras.
- Una vez asignado el primer lugar, para el segundo puesto, restan dos candidatas.
- Para la última medalla, solo queda una candidata posible.

Así pues, el número de clasificaciones diferentes es $3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$.

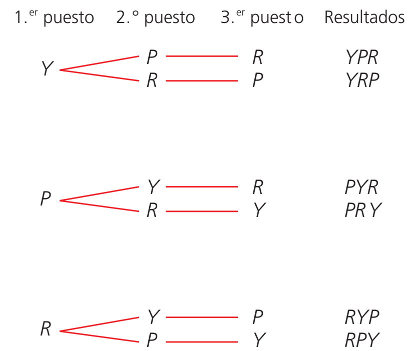


Figura 1

A cada una de las ordenaciones dadas por las ramas del diagrama de árbol se les llama permutaciones de tres elementos.

Las **permutaciones sin repetición** de n elementos son los distintos grupos que se pueden formar de manera que:

- En cada grupo estén los n elementos.
- Un grupo se diferencie de otro únicamente en el orden de colocación de sus elementos.

El número de permutaciones sin repetición de n elementos se representa por P_n y es igual a $\boldsymbol{P_n = n(n-1)(n-2)... 3 \cdot 2 \cdot 1}$.

El número $n(n-1)(n-2) ... 3 \cdot 2 \cdot 1$ se llama **factorial de *n*** y se simboliza por ***n*!**, siendo n un número natural.

Los factoriales de 0 y de 1 se definen así: $0! = 1! = 1$.

En la calculadora

Factorial de un número

En la mayoría de las calculadoras existe la tecla x! para calcular el factorial de un número. Por ejemplo, para hallar el factorial del número 13, se digita:

1 3 x! EXE,

con lo cual se obtiene: 6 227 020 800.

- Encuentra el factorial de 5, 12 y 20 con la calculadora.

Actividades resueltas

Ejercitación

1 Realiza estas operaciones $\frac{5!}{3!}$ y $\frac{12!}{9!3!}$.

Solución:

$$\frac{5!}{3!} = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3!}{3!} = 5 \cdot 4 = 20$$

$$\frac{12!}{9!3!} = \frac{12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9!}{9! \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = \frac{12}{6} \cdot 11 \cdot 10 = 2 \cdot 11 \cdot 10 = 220$$

Resolución de problemas

2 En una competencia de 1 500 m participan ocho atletas. ¿De cuántas formas diferentes podrán llegar a la meta suponiendo que el empate no es posible?

Solución:

$$P_8 = 8! = 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 40\,320 \text{ formas distintas}$$

3 ¿Cuántas posibles rutas puede planificar un turista para visitar cinco ciudades distintas sin repetir ninguna?

Solución:

$$P_5 = 5! = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120 \text{ rutas distintas}$$

Destrezas con criterios de desempeño:
- Aplicar métodos de conteo (permutaciones sin repetición) en el cálculo de probabilidades.
- Calcular el factorial de un número natural en el cálculo de probabilidades.

Desarrolla tus destrezas

Ejercitación

4 Halla las distintas permutaciones sin repetición que pueden formarse en cada caso.

a. Números de cinco cifras diferentes que pueden formarse con los dígitos 1, 2, 3, 4, 5.

b. Número de formas distintas en que pueden sentarse ocho personas en una fila de asientos.

c. Número de formas distintas en que pueden sentarse ocho personas alrededor de una mesa redonda.

d. Número de ordenaciones distintas que pueden hacerse con las letras de la palabra "libro" y que empiecen por vocal.

e. Números de cinco cifras distintas que pueden formarse con las cifras impares.

f. Número de formas en que pueden ubicarse los 11 jugadores de un equipo de fútbol teniendo en cuenta que el portero no puede ocupar otra posición distinta a la portería.

Razonamiento

5 Analiza y responde.

a. Con las letras de la palabra "PERA", ¿cuántos grupos diferentes de cuatro letras puedes escribir sin que se repita ninguna? ¿Y cuántos si la primera es la letra P?

b. Con las letras a, b, c, d, e y f, ¿cuántos grupos diferentes de seis letras pueden formarse sin que se repitan?

c. Con las letras de la palabra "ECUADOR", ¿cuántos grupos diferentes de siete letras pueden formarse?

d. En un juego de azar se eligen seis números del 1 al 49, incluyendo estos dos. ¿Cuántas jugadas distintas pueden efectuarse?

e. ¿De cuántas formas diferentes pueden colocarse las letras de la palabra "LIBRO"?

Resolución de problemas

6 Sandra pone, cada día, libros de consulta en su estantería al llegar a casa. Allí están los seis libros que utiliza con mayor frecuencia. ¿Cuántas ordenaciones distintas puede realizar?

7 Con las letras de la palabra "AMIGO",

a. ¿cuántas ordenaciones distintas pueden hacerse?

b. ¿cuántas empiezan por A? ¿Cuántas empiezan con "AMI"?

8 En un colegio, las seis aulas de un pasillo están destinadas a los seis grupos de décimo grado.



¿De cuántas formas pueden distribuirse esos seis grupos en este pasillo?

9 Se tienen seis tarros de pintura de distintos colores y se quiere pintar cada cara de un cubo de un color distinto. ¿De cuántas formas diferentes puede hacerse?

10 En un banquete de bodas, hay mesas redondas con capacidad para ocho personas.

a. ¿De cuántas formas podrán sentarse en una de las mesas?

b. ¿Cuántas distribuciones diferentes habrá en una mesa en la que dos personas quieren estar juntas?

11 A una reunión de alcaldes, acudieron doce mandatarios locales.



a. A la hora de tomar una foto conmemorativa se ubicaron en fila. ¿De cuántas formas distintas pudieron ubicarse?

b. A la hora de comer se sentaron en una mesa circular. ¿De cuántas maneras distintas pudieron ubicarse?

12 En el banquete que sigue a una boda, diez personas se sientan en la mesa principal, incluidos los novios. Si la mesa es lineal, ¿de cuántas formas distintas pueden ubicarse con la condición de que los novios no se separen? ¿Y si la mesa es circular, con la misma condición?

7 Variaciones y combinaciones

Explora

Se organizó un torneo benéfico con cuatro equipos profesionales de fútbol.



- Calcula de cuántas formas distintas pueden otorgarse los títulos de campeón y subcampeón.

Ten en cuenta

Con un diagrama de árbol puede determinarse el número de maneras en que puede suceder una experiencia u ocurrir algún evento.

7.1 Variaciones sin repetición

Para calcular de cuántas formas distintas pueden otorgarse los títulos de campeón y subcampeón en este torneo, se representa a cada equipo con una letra: *A*, *B*, *C* y *D*; y se elabora el diagrama de árbol de la Figura 1.

- Cualquiera de los cuatro equipos puede obtener el título de campeón.
- Una vez concedido dicho título, quedan tres candidatos posibles para el de subcampeón.

Por lo tanto, hay $4 \cdot 3 = 12$ formas diferentes de adjudicar los títulos.

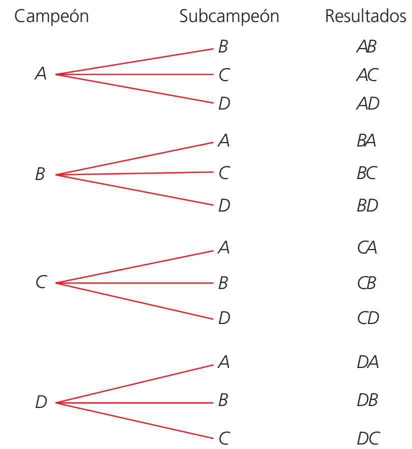


Figura 1

A las distintas ordenaciones se les llama **variaciones de cuatro elementos tomados de dos en dos.**

Las variaciones sin repetición de *m* elementos tomados de *n* en *n* ($n \leq m$) son los distintos grupos que pueden formarse con los *m* elementos, de manera que:

- En cada grupo haya *n* elementos diferentes.
- Dos grupos son distintos si difieren en algún elemento o en el orden de colocación.

El número de variaciones sin repetición de *m* elementos tomados de *n* en *n* se representa por $V_{m,n}$ y es igual a:

$$V_{m,n} = m(m-1)(m-2) \dots (m-n+1) = \frac{m!}{(m-n)!}.$$

Ejemplo 1

Observa algunas aplicaciones de las variaciones sin repetición.

- En un colegio se organiza un concurso de resolución de problemas entre 150 estudiantes de décimo año. Se entregarán paquetes de libros de diferentes cantidades a los cuatro estudiantes mejor clasificados.

  Como se trata de averiguar las variaciones de 150 elementos tomados de 4 en 4, entonces se aplica la fórmula estudiada, así:

$$V_{150,4} = \frac{150!}{(150-4)!} = 150 \cdot 149 \cdot 148 \cdot 147 = 486\,246\,600$$

- Con las cifras 1, 2, 3, 4, 5 y 6 pueden formarse 360 variaciones sin repetición de números de cuatro cifras porque:

$$V_{6,4} = \frac{6!}{2!} = 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 = 360$$

- Para determinar cuántos números de tres cifras distintas pueden formarse con los números 0, 1, 2, 3, 4 y 5 ($V_{5,3}$), deben descartarse los números de tres cifras que empiezan por 0 ($V_{5,2}$). Es decir, pueden formarse:

$$V_{5,3} - V_{5,2} = (6 \cdot 5 \cdot 4) - (5 \cdot 4) = 120 - 20 = 100 \text{ números distintos}$$

Destreza con criterios de desempeño: Aplicar métodos de conteo (variaciones,combinaciones) en el cálculo de probabilidades.

7.2 Variaciones con repetición

Las variaciones con repetición de m elementos tomados de n en n son los distintos grupos que pueden formarse con los m elementos, de manera que:

- En cada grupo haya n elementos repetidos o no.
- Dos grupos son distintos si difieren en algún elemento o en el orden de colocación.

El número de **variaciones con repetición de *m* elementos tomados de *n* en *n*** se representa por $VR_{m,n}$ y es igual a:

$$VR_{m,n} = m^n.$$

Ten en cuenta

La diferencia entre las variaciones sin repetición y las variaciones con repetición consiste en que en las primeras, cada grupo tiene elementos diferentes, mientras que en las segundas, cada grupo puede tener elementos diferentes o repetidos.

Ejemplo 2

Se lanzan tres monedas distintas al aire: una de 1 ctv., otra de 10 cts. y otra de 50 cts. Luego, se anota el resultado de las caras superiores. Se representa por C si aparece cara y por X si sale sello en cada una de las monedas, y se hace un diagrama de árbol como el de la Figura 2

- Para la moneda de 1 ctv. pueden obtenerse dos resultados distintos.
- Para la de 10 cts. pueden conseguirse dos resultados diferentes.
- Y para la de 50 cts. también puede haber dos resultados distintos.

Por lo tanto, pueden obtenerse:

$$2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^3 = 8 \text{ resultados diferentes}$$

Las distintas ordenaciones que acaban de hallarse se llaman **variaciones con repetición de dos elementos tomados de tres en tres.**

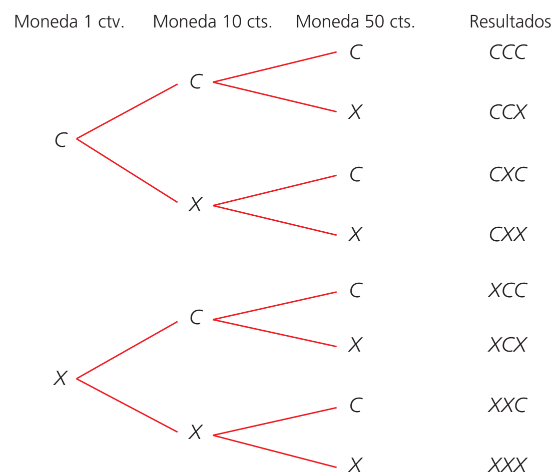


Figura 2

Ejemplo 3

- Para averiguar cuántos números distintos de cuatro cifras pueden formarse con los dígitos 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 y 9, se tiene en cuenta que los grupos que pueden obtenerse son:

  $VR_{10,4}$ pero hay que descontar los que empiezan por 0, es decir, $VR_{10,3}$

  Luego, los números diferentes de cuatro cifras que pueden formarse son:

$$VR_{10,4} - VR_{10,3} = 10^4 - 10^3 = 9\,000$$

7.3 Combinaciones sin repetición

Las combinaciones sin repetición de m elementos tomados de n en n ($n \leq m$) son los distintos grupos que pueden formarse con los m elementos, de manera que:

- En cada grupo haya n elementos diferentes.
- Dos grupos son distintos si difieren en algún elemento, pero no en el orden de ubicación.

El número de combinaciones sin repetición de m elementos tomados de n en n se representa por $C_{m,n}$ y es igual a:

$$C_{m,n} = \frac{V_{m,n}}{P_n}$$

7 Variaciones y combinaciones



SM Ediciones

Actividades resueltas

Resolución de problemas

1 Las tarjetas de crédito tienen, aparte de los datos del titular, 16 dígitos. ¿Cuántas tarjetas de crédito diferentes pueden hacerse?

Solución:

Para determinar cuántas tarjetas de crédito diferentes pueden hacerse, se debe calcular cuántas codificaciones diferentes de 16 cifras pueden formarse con los 10 dígitos.

Es decir, debe determinarse el valor de $VR_{10,16}$, así:

$$VR_{10,16} = 10^{16}.$$

Pueden hacerse un total de 10^{16} tarjetas de crédito diferentes, es decir, 10 000 billones de tarjetas.

2 Juan quiere preparar jugos combinados con dos frutas diferentes. Tiene manzanas, naranjas, peras y uvas. ¿Cuántos sabores puede conseguir?

Solución:

Cada una de las cuatro variedades de fruta puede combinarse con las tres restantes, por lo que habrá, en principio, $4 \cdot 3 = 12$ sabores; pero de ellos solo puede considerarse la mitad, ya que el jugo de manzana y naranja es el mismo que el de naranja y manzana (no importa el orden en que se mezclen las frutas).

Este razonamiento es equivalente a $C_{4,2} = \frac{V_{4,2}}{P_2}$, por lo cual:

$$C_{4,2} = \frac{V_{4,2}}{P_2} = \frac{4 \cdot 3}{2} = 6 \text{ sabores.}$$

MatemaTICS

Halla variaciones sin repetición en GeoGebra

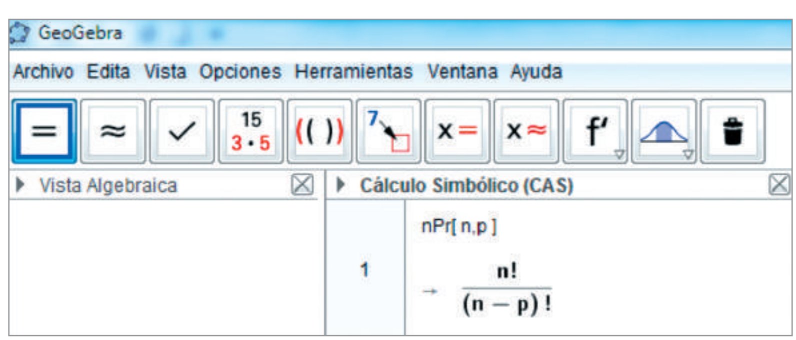
En GeoGebra puede calcularse el número de variaciones sin repetición de un experimento conociendo los p elementos tomados de un conjunto de n, escribiendo en la caja de CAS (Cálculo Simbólico) las palabras "**nPr**" junto con los dos números dentro de corchetes separados por una coma.

- Observa cómo se halla el número de variaciones sin repetición de p elementos tomados de un conjunto de n elementos.

Se escribe en la barra de entrada o en CAS:

nPr[p,n].

Luego, se da enter en el teclado y el resultado aparece como se muestra en la imagen de la derecha.



Halla el número de variaciones sin repetición de siete elementos tomados de un conjunto de cinco.

Destreza con criterios de desempeño: Aplicar métodos de conteo (variaciones,combinaciones) en el cálculo de probabilidades.

Desarrolla tus destrezas

Resolución de problemas

3 En una carrera participan 16 caballos y solo se adjudican tres premios.



Suponiendo que no pueden llegar a la meta al mismo tiempo, ¿de cuántas maneras pueden otorgarse los diferentes premios?

4 Una asociación ecológica está conformada por 30 socios fundadores. Si tienen que elegir presidente, vicepresidente, secretario y tesorero, ¿de cuántas formas diferentes pueden cubrirse esos cargos?

5 ¿Cuántos números de tres cifras distintas pueden formarse con los dígitos impares? ¿Y con los pares?

6 Una ruta de bus intercantonal recorre diez poblaciones. ¿Cuántos billetes diferentes tendrán que imprimirse teniendo en cuenta que en cada billete figura, en primer lugar, la localidad de origen, seguida de la localidad de destino y, por último, dice si el billete es solo de ida o de ida y vuelta?

7 Para un nuevo club deportivo, quiere diseñarse una bandera tricolor, con tres colores distintos, que conste de tres franjas verticales. Si para crearla se dispone de diez colores distintos, ¿cuántas banderas diferentes pueden hacerse?

8 Se lanzan dos dados cúbicos de diferentes colores con las caras numeradas del 1 al 6. ¿Cuántos resultados distintos pueden obtenerse? ¿Y si son tres dados?

9 Las matrículas de los vehículos en cierto país están representadas por cuatro números seguidos de tres letras, tomadas de entre 20 consonantes. ¿Cuántos automóviles podrán matricularse con este sistema?

10 Se puede entrar y salir de un polideportivo por cinco puertas diferentes. ¿De cuántas maneras puede una sola persona acceder y salir del mismo?

11 En una revista, cada semana tienen una sección donde se analizan los signos del zodiaco. A cada uno de los doce signos se le asigna un número entero entre 0 y 5 en las categorías de salud, dinero, amor, amistades y familia. ¿Cuántos horóscopos distintos puede hacer la revista cada semana?

12 Los números de los billetes de cierta lotería tienen cinco cifras que pueden repetirse. Si, por error, un día se les olvida incluir el número 0 entre las cinco bolas, ¿cuántos posibles números habrá como candidatos al premio?

13 Al girar una ruleta puede salir como resultado cualquier número natural comprendido entre 0 y 36, incluidos estos dos números.



Si se gira la ruleta tres veces, ¿cuántos resultados pueden obtenerse?

14 Con los dígitos 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 y 9, ¿cuántos productos distintos pueden obtenerse al multiplicar cuatro de ellos que sean diferentes? ¿Y si se multiplican cinco diferentes?

15 Diez pueblos se encuentran comunicados mediante caminos, de forma que hay uno que une entre sí cada par de pueblos. ¿Cuántos caminos diferentes hay?

16 Con diez puntos del espacio, de los que tres no están nunca alineados, ¿cuántos triángulos distintos pueden formarse?

17 Una empresa ofrece cinco plazas vacantes. Tres de ellas corresponden a mujeres y dos a hombres. Se presentaron quince hombres y doce mujeres.

a. ¿De cuántas formas distintas podrán cubrirse las vacantes, considerando que todas tienen igual salario?

b. ¿De cuántas formas distintas podrán cubrirse las vacantes si las plazas de las mujeres tienen todas distinto salario?

8 Números combinatorios

Explora

Es importante recordar que $C_{m,n}$ es el número de combinaciones de m elementos tomados de n en n.

- Expresa este mismo número en notación factorial.

Cuando se expresa $C_{m,n}$ en forma factorial, se obtiene lo siguiente:

$$C_{m,n} = \frac{V_{m,n}}{P_n} = \frac{m(m-1)\ldots(m-n+1)}{n!} = \frac{m(m-1)\ldots(m-n+1)(m-n)!}{n!(m-n)!} = \frac{m!}{n!(m-n)!}$$

El número $C_{m,n}$ se llama **número combinatorio**, se representa por $\binom{m}{n}$ y se lee "m sobre n".

$$c_m^n = \binom{m}{n} = \frac{m!}{n!(m-n)!}$$

Blaise Pascal diseñó una disposición triangular para los números combinatorios, como la que se observa en la Figura 1, en la cual cada número se obtiene sumando los dos ubicados en la parte superior, a excepción de los extremos, que son iguales a la unidad.

$$\binom{1}{0} \quad \binom{1}{0}$$
$$\binom{2}{0} \quad \binom{2}{1} \quad \binom{2}{2}$$
$$\binom{3}{0} \quad \binom{3}{1} \quad \binom{3}{2} \quad \binom{3}{3}$$
$$\binom{4}{0} \quad \binom{4}{1} \quad \binom{4}{2} \quad \binom{4}{3} \quad \binom{4}{4}$$

$$1 \quad 1$$
$$1 \quad 2 \quad 1$$
$$1 \quad 3 \quad 3 \quad 1$$
$$1 \quad 4 \quad 6 \quad 4 \quad 1$$

Figura 1

Este triángulo se conoce como **triángulo de Pascal**.

Los números combinatorios del triángulo de Pascal cumplen las propiedades que se mencionan a continuación:

1. Todas las filas empiezan y acaban en 1: $\binom{m}{0} = 1$ y $\binom{m}{m} = 1$.

2. Todas las filas son simétricas: $\binom{m}{n} = \binom{m}{m-n}$.

3. Cada número se obtiene sumando los dos que tiene encima, excepto los extremos: $\binom{m}{n} + \binom{m}{n+1} = \binom{m+1}{n+1}$.

Ten en cuenta



El matemático francés **Blaise Pascal** (1623-1662) contribuyó al desarrollo del cálculo y de la teoría de la probabilidad.

Actividad resuelta

Razonamiento

1 Calcula el valor de: $\binom{35}{0}$; $\binom{35}{35}$; $\binom{35}{31}$; $\binom{35}{4}$ y $\binom{5}{2} + \binom{5}{3}$.

Solución:

$$\binom{35}{0} = 1; \binom{35}{35} = 1; \binom{35}{31} = \frac{35!}{31!\,4!} = \frac{35 \cdot 34 \cdot 33 \cdot 32 \cdot 31!}{31!\,4!} = 52\,360$$

$$\binom{35}{4} = \binom{35}{35-4} = \binom{35}{31} = 52\,360; \binom{5}{2} + \binom{5}{3} = \binom{6}{3} = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4}{3 \cdot 2} = 20$$

Destreza con criterios de desempeño: Calcular el factorial de un número natural y el coeficiente binomial en el cálculo de probabilidades.

Desarrolla tus destrezas

Ejercitación

2 Determina el valor de estos números combinatorios.

a. $\binom{6}{3}$ b. $\binom{7}{7}$ c. $\binom{9}{4}$

d. $\binom{7}{2}$ e. $\binom{8}{4}$ f. $\binom{10000}{9999}$

g. $\binom{5252}{5252}$ h. $\binom{8000}{0}$ i. $\binom{10^{10}}{1}$

Comunicación

3 Calcula el valor de $\binom{15}{8}+\binom{15}{9}$ de dos formas distintas: con la fórmula de obtención de los números combinatorios y con las propiedades de dichos números.

4 Halla el valor de las siguientes expresiones.

a. $\binom{15}{7}+\binom{15}{8}$

b. $\binom{7}{2}+\binom{7}{3}+\binom{8}{4}-\binom{9}{4}$

c. $\binom{4}{0}+\binom{4}{1}+\binom{4}{2}+\binom{4}{3}$

5 Determina el valor de x en cada igualdad.

a. $\binom{52}{6}=\binom{52}{x}$ b. $\binom{x}{14}=\binom{x}{32}$

c. $\binom{14}{6}=\binom{14}{x}$ d. $\binom{16}{2x}=\binom{16}{x+1}$

6 Completa en tu cuaderno los recuadros con el número combinatorio correspondiente.

a. $\binom{8}{5}+\square=\binom{9}{6}$ b. $\square+\binom{11}{9}=\binom{12}{9}$

7 Determina en qué fila del triángulo de Pascal debe ir la siguiente fila.

1 6 15 20 15 6 1

8 Indica qué otro número combinatorio de la misma fila del triángulo de Pascal vale lo mismo que:

a. $\binom{15}{0}$ b. $\binom{15}{2}$

Modelación

9 Suma todos los términos de cada fila del triángulo de Pascal y averigua qué tipo de sucesión forman los resultados. Calcula el término general.

10 Lee y resuelve.

El desarrollo de la potencia $(a+b)^n$ se calcula según la siguiente expresión que se conoce como **binomio de Newton**.

$$(a+b)^n = \binom{n}{0}a^n+\binom{n}{1}a^{n-1}b+\binom{n}{2}a^{n-2}b^n+\ldots+\binom{n}{n}b$$

$$(a-b)^n = \binom{n}{0}a^n+\binom{n}{1}a^{n-1}b-\binom{n}{2}a^{n-2}b^n+\ldots(-1)^n\binom{n}{n}b$$

Por ejemplo:

$$(2x+3y)^3 = \binom{3}{0}(2x)^3+\binom{3}{1}(2x)^2(3y)+\binom{3}{2}2x(3y)^2+\binom{3}{3}(3y)^3$$
$$= 8x^3+36x^2y+54xy^2+27y^3$$

a. Calcula el sexto término del desarrollo del binomio $(2x+5y)^{10}$.

b. Determina el cuarto término del desarrollo del binomio $(3a^2-2b^2)^3$.

c. Desarrolla estas potencias:

$(a^2+2b)^3$ $(a^2-2b)^5$

$(3x-2y)^4$ $(3x-2y)^6$

Resolución de problemas

11 Sin realizar el desarrollo, halla:

a. El término situado en el quinto lugar en el desarrollo del binomio $(x+4y)^{16}$.

b. El término ubicado en la octava posición en el desarrollo del binomio $(a-3b)^{14}$.

12 En el desarrollo del binomio $\left(5x-\frac{y}{4}\right)^9$:

a. Encuentra el coeficiente del monomio x^2y^7.

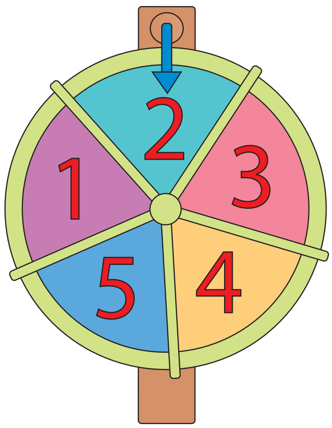
b. Halla el coeficiente del monomio x^5y^4.

c. Determina los coeficientes de los monomios que solo tienen x o y.

9 Experimentos aleatorios. Sucesos

Explora

Se hace girar una ruleta con los números del 1 al 5 y se anota el número obtenido.



- ¿Puede predecirse el resultado que se consigue cada vez que se lleva a cabo este experimento?

9.1 Experimentos aleatorios

En este caso, la respuesta es no. Por muchas veces que se repita el experimento, jamás podrá predecirse el resultado. Se trata de un **experimento aleatorio**.

Por el contrario, los experimentos cuyo resultado es predecible, como anotar a qué hora sale el sol cada mañana, se denominan **experimentos deterministas**.

Un **experimento aleatorio** es una acción o un ensayo en el que no puede predecirse el resultado que va a obtenerse antes de realizarlo.

Ejemplo 1

Se consideran los siguientes experimentos:

- Lanzar un dado.
- Extraer una carta de una baraja española.
- Averiguar qué número está pensando una persona.
- Determinar la relación entre el perímetro y el diámetro de una serie de circunferencias.
- Averiguar cuál es el próximo día que habrá luna llena.
- Medir la aceleración de un objeto que se deja caer al vacío.

En los tres primeros experimentos, por muchas veces que se repita la experiencia, no puede conocerse el resultado. Por lo tanto, son experimentos aleatorios.

En los tres últimos experimentos, puede conocerse el resultado antes de realizarlos.De modo que son experimentos deterministas.

9.2 Espacio muestral

El **espacio muestral** es el conjunto formado por todos los resultados posibles de un experimento aleatorio. Se denota con E.

Ejemplo 2

- En el experimento aleatorio de lanzar dos monedas al aire y anotar sus resultados, tal que C es cara y S es sello, el espacio muestral es:

$$E = \{CC, CS, SC, SS\}.$$

- El espacio muestral en el experimento de lanzar un dado y anotar los puntos obtenidos es:

$$E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}.$$

9.3 Tipos de sucesos

Un **suceso aleatorio** es un subconjunto del espacio muestral. Los tipos de sucesos son: **elemental**, **compuesto**, **seguro**, **imposible** y **contrario**.

- **Suceso elemental** es el que tiene un solo resultado.
- **Suceso compuesto** es el formado por más de un resultado.
- **Suceso seguro** es el que siempre se realiza. Se designa por E.
- **Suceso imposible** es el que nunca se realiza. Se designa por $\varnothing$.
- **Suceso contrario** del suceso A ($\overline{A}$) es el que se realiza cuando no ocurre el de A.

Ten en cuenta

Los sucesos pueden representarse mediante un diagrama de Venn. En la Figura 1, se representan dos sucesos contrarios.

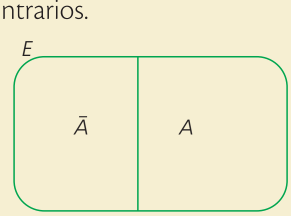


Figura 1

Destreza con criterios de desempeño: Describir las experiencias y sucesos aleatorios a través del análisis de sus representaciones gráficas y el uso de la terminología adecuada.

Ejemplo 3

Si nuevamente se considera el experimento de girar la ruleta con los números del 1 al 5 y anotar el número obtenido, se halla que:

- El espacio muestral es $E = \{1, 2, 3, 4, 5\}$.
- Cualquier subconjunto del espacio muestral como, por ejemplo, $\{2\}$, $\{3, 4, 5\}$ o el propio E es un suceso aleatorio.
- El suceso A: "Salir el 1" $= \{1\}$ o el B: "Salir el 4" $= \{4\}$ son sucesos elementales por estar compuestos de un solo resultado.
- El suceso C: "Salir un número impar" $= \{1, 3, 5\}$ o el $D =$ "Salir un número inferior a 5" $= \{1, 2, 3, 4\}$ son sucesos compuestos por estar formados por más de un resultado.
- El suceso $E = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ es un suceso seguro, ya que al girar la ruleta es indudable que se obtendrá uno de esos números.
- El suceso F: "Salir un número negativo" es un suceso imposible, porque al girar la ruleta no es posible que se consiga un número negativo.
- El suceso "Salir un número par" $= \{2, 4\}$ es un suceso contrario de C y se representa por $\overline{C}$.

Ten en cuenta

El conjunto de todos los sucesos de un experimento aleatorio se llama espacio de sucesos. Se designa por S.

9.4 Operaciones con sucesos

Dados dos sucesos, A y B, de un mismo experimento aleatorio, se llama **suceso unión de *A* y *B*** el que se realiza cuando se lleva a cabo al menos uno de los sucesos A o B. Se designa por $\boldsymbol{A \cup B}$.

El suceso $A \cup B$ está formado por todos los puntos muestrales que pertenecen a alguno de los dos sucesos A y B.

Ejemplo 4

Se lanza un dado cúbico con sus caras numeradas del 1 al 6 y se anota el resultado. Luego, se consideran los sucesos:

A: "Salir un número impar" $\Rightarrow A = \{1, 3, 5\}$

B: "Salir un número primo" $\Rightarrow B = \{2, 3, 5\}$

El suceso unión de A y B, o sea, "Salir un número impar" o "Salir un número primo" ocurrirá cuando se lleve a cabo el suceso A o el suceso B. Por lo tanto:

$$A \cup B = \{1, 2, 3, 5\}.$$

Dados dos sucesos, A y B, de un mismo experimento aleatorio, se llama **suceso intersección de *A* y *B*** el que se produce cuando se llevan a cabo simultáneamente los sucesos A y B. Se designa por $\boldsymbol{A \cap B}$.

El suceso $A \cap B$ está formado por todos los puntos muestrales comunes a los dos sucesos A y B.

Ejemplo 5

Continuando con el experimento y los sucesos del ejemplo anterior, se considera ahora el suceso D: "Salir un número impar y salir un número primo".

Este suceso se producirá si se realizan a la vez los sucesos A y B. Por lo tanto:

$$A \cap B = \{3, 5\}.$$

Razonamiento matemático

Sucesos aleatorios

En una ciudad se ha instalado un semáforo en un cruce que da paso a la derecha, a la izquierda y hacia delante.

Si llegan dos automóviles al cruce, responde:



- ¿Cuál es el espacio muestral del experimento?
- ¿Cuáles son los elementos del suceso: "uno de los dos automóviles gira"?
- ¿Cuáles son los elementos del suceso: "los dos automóviles siguen la misma ruta"?

9 Experimentos aleatorios. Sucesos

Si A y B son sucesos del mismo experimento aleatorio, se tiene que:

- Si $\mathbf{A \cap B = \varnothing}$, entonces A y B son **incompatibles**.
- Si $\mathbf{A \cap B \neq \varnothing}$, entonces A y B son **compatibles**.

Ejemplo 6

Si se consideran ahora los sucesos:

A: "Salir un número impar" $= \{1, 3, 5\}$

X: "Salir un múltiplo de 4" $= \{4\}$

Es evidente que $A \cap X = \varnothing$, es decir, el suceso es imposible. Por lo tanto, los sucesos A y B son incompatibles.

Actividades resueltas

Ejercitación

1 Halla la unión e intersección de los sucesos indicados.

a. $A = \{2, 4, 7\}$ y $B = \{3, 7, 9, 12\}$

b. $C = \{5, 6, 7\}$ y $D = \{1, 3, 9, 11\}$

Solución:

a. $A \cup B = \{2, 3, 4, 7, 9, 12\}$

$A \cap B = \{7\}$

b. $C \cup D = \{1, 3, 5, 6, 7, 9, 11\}$

$C \cap D = \varnothing$

Resolución de problemas

2 Se lanza un dado dodecaédrico, como el de la Figura 2, y se anota el resultado de la cara superior. Se consideran los siguientes sucesos:

A = "Salir un número múltiplo de 4" $= \{4, 8, 12\}$

B = "Salir un número menor que 5" $= \{1, 2, 3, 4\}$

C = "Salir un número múltiplo de 5" $= \{5, 10\}$

Forma los sucesos:

a. D = "Salir un número múltiplo de 4 o menor que 5"

b. F = "Salir un número múltiplo de 4 y menor que 5"

c. G = "Salir un número múltiplo de 4 y de 5"

Solución:

a. El suceso D = "Salir un número múltiplo de 4 o menor que 5" es:

$$D = A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 8, 12\}.$$

b. El suceso F = "Salir un número múltiplo de 4 y menor que 5" es:

$$F = A \cap B = \{4\}.$$

c. El suceso G = "Salir un número múltiplo de 4 y de 5" es:

$$G = A \cap C = \varnothing.$$

Los sucesos D, F y G se representaron mediante diagramas de Venn en las Figuras 3, 4 y 5, respectivamente.



Figura 2

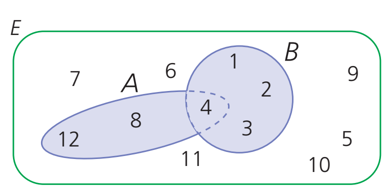


Figura 3

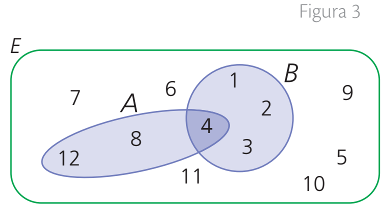


Figura 4

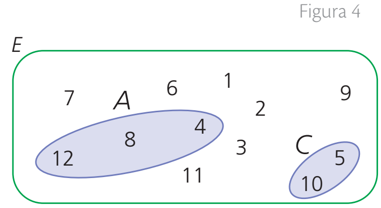


Figura 5

Destreza con criterios de desempeño: Describir las experiencias y sucesos aleatorios a través del análisis de sus representaciones gráficas y el uso de la terminología adecuada.

Desarrolla tus destrezas

Comunicación

3 Indica si los siguientes experimentos son aleatorios y, en caso afirmativo, describe el espacio muestral.

a. Hacer girar la flecha de una ruleta dividida en seis sectores numerados de 1 a 6.

b. Extraer una bola de la urna que contiene seis amarillas, dos azules, cuatro verdes y seis negras.

4 Describe el espacio muestral de los siguientes experimentos aleatorios.

a. Sacar de una caja una ficha de dominó teniendo en cuenta que solo contiene aquellas cuya suma de puntos es inferior a 5.

b. Extraer de una caja una de las piezas de ajedrez.

c. Lanzar tres monedas.

d. Escoger un número par entre los números 200 a 253.

e. Tomar dos bolas de una bolsa que contiene tres bolas azules, dos moradas y cuatro verdes.

f. Lanzar dos dados al mismo tiempo.

5 Analiza las situaciones y luego, realiza lo que se indica en cada caso.

a. Se hace girar la ruleta (del 1 al 36) y se anota el resultado obtenido.

Se consideran los siguientes sucesos:

A: "Salir número par"

B: "Salir divisor de 12"

C: "Salir número menor que 10"

D: "Salir número mayor que 10"

Forma los sucesos *A*, *B*, *C* y *D* y sus contrarios.

b. Se lanza un dado cúbico con las caras numeradas del 1 al 6 y se anota el número de puntos obtenidos.

- ¿Es aleatorio este experimento?
- Determina el espacio muestral.
- Forma los sucesos contrarios de:

$A = \{2, 4\}$, $B = \{1, 3, 5\}$ y $C = \{3\}$.

c. En una urna hay siete bolas numeradas del 1 al 7. Se extrae una bolas al azar y se anota su número.

- Explica si el experimento es aleatorio.
- Determina el espacio muestral.
- Forma dos sucesos compuestos y sus contrarios.

Resolución de problemas

6 Una urna contiene ocho bolas numeradas del 1 al 8. Se extrae una bola al azar y se anota su número. Considera $A = \{2, 3, 5\}$, $B = \{3, 8\}$ y $C = \{1, 2, 5, 7\}$. Halla los siguientes sucesos.

a. $A \cup B$ **b.** $A \cup C$ **c.** $B \cup C$

d. $A \cap B$ **e.** $A \cap C$ **f.** $B \cap C$

7 Se realiza el experimento que consiste en lanzar un dado cúbico con las caras numeradas del 1 al 6.



a. Escribe un ejemplo de dos sucesos que sean contrarios. ¿Son incompatibles?

b. Muestra dos sucesos que sean incompatibles. ¿Son contrarios?

8 Se lanza un dado con diez caras numeradas del 1 al 10 y se consideran los sucesos *A*: "Salir un número par" y *B*: "Salir un número múltiplo de 4". Encuentra $\overline{A}$, $A \cup B$ y $\overline{A} \cup B$. ¿Son incompatibles los sucesos *A* y *B*? Justifica tu respuesta.

9 Al tomar una carta de una baraja de naipes se consideran los sucesos *A*: "Sacar un número", *B*: "Sacar una figura" y *C*: "Sacar un as". Halla los sucesos $A \cup B$ y $A \cup C$ y $B \cup C$. ¿Son compatibles *B* y *C*? ¿Por qué?

10 Se extrae una bola de una urna que contiene 20 bolas numeradas del 1 al 20. Se consideran los siguientes sucesos.

A: "Salir un múltiplo de 3"

B: "Salir un múltiplo de 5"

C: "Salir un número par"

Halla $A \cup B$ y $A \cup C$ y $B \cup C$. ¿Son compatibles *B* y *C*? ¿Por qué?

11 Se considera un experimento aleatorio que consiste en sacar tres tornillos de una caja, que pueden estar en buen estado o defectuosos. Forma el espacio muestral y los sucesos *A*: "El último tornillo es defectuoso" y *B*: "Al menos dos tornillos son defectuosos".

Medidas de tendencia central

Ejercitación

1. Halla la media, la mediana y la moda del conjunto de datos presentados en la Tabla 1.

Tiempo de duración	Número de personas
[0, 7]	35
[7, 14]	23
[14, 21]	15
[21, 28]	10
[28, 35]	9

Tabla 1

Medidas de dispersión

2. Calcula el rango, la varianza y la desviación típica de los datos presentados en la Tabla 2.

Puntaje	Número de personas
[5, 9]	6
[9, 13]	9
[13, 17]	7
[17, 21]	15
[21, 25]	12

Tabla 2

3. Observa los datos de la Tabla 3. Luego, halla el coeficiente de variación e interpreta los resultados.

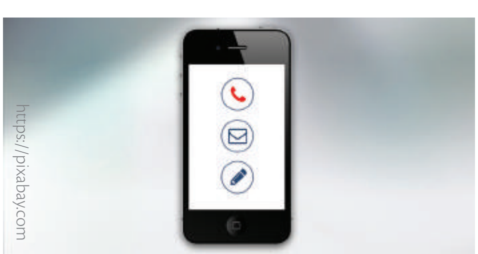
X	41	29	35	24	25	19
Y	41	45	56	49	38	48

Tabla 3

Permutaciones, variaciones y combinaciones

Resolución de problemas

4. Se quiere crear una clave telefónica con seis dígitos. Si la condición es que los dígitos no deben repetirse, ¿cuántas claves diferentes pueden obtenerse?



5. Un equipo de fútbol tiene tres estilos diferentes de camisetas, dos de pantalonetas y tres de medias. ¿De cuántas maneras diferentes pueden uniformarse para un partido?



6. Se tienen ocho regalos distintos para premiar a los mejores cuatro estudiantes del salón. A cada uno se le darán dos regalos. ¿De cuántas formas diferentes podrán entregarse los regalos?



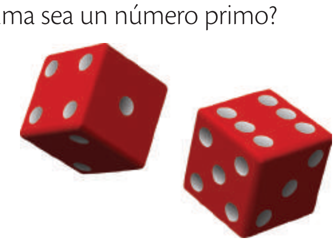
Experimentos aleatorios y probabilidad

Resolución de problemas

7. Para una rifa, se vendieron 1 000 boletos con cuatro números cada una. Alba compró tres boletos. ¿Qué probabilidad tiene de ganar con una boleto? ¿Y con las cuatro boletos?



8. Se lanzan dos dados, uno numerado con números pares y otro con números impares. ¿Cuál es la probabilidad de que la suma sea un número primo?



Resolución de Problemas

Estrategia: Descomponer el problema en partes

Problema

Doce personas viajan en tres automóviles, cada uno con cuatro personas, y cada vehículo es conducido por su dueño. ¿De cuántas maneras pueden repartirse en los vehículos las nueve personas restantes si la disposición de las personas dentro de cada uno no es relevante?

1. Comprende el problema

- ¿Qué información puedes obtener del enunciado?
  R: El número de personas que viajan en tres vehículos, incluyendo a los conductores de cada uno.
- ¿Qué te piden encontrar?
  R: El número de maneras en que pueden acomodarse las personas dentro de los vehículos.

2. Crea un plan

- Identifica el tipo de ordenación que puede hacerse en el primer vehículo, luego en el segundo y finalmente en el tercero.

3. Ejecuta el plan

- Debe determinarse de cuántas maneras pueden acomodarse tres de los nueve pasajeros dentro del primer vehículo. Es decir:

$$C_{9,3} = \frac{9 \cdot 8 \cdot 7}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 84 \text{ maneras.}$$

- Una vez se eligen los tres pasajeros del primer vehículo, se calcula el número de formas en que otros tres pasajeros ocuparán el segundo vehículo. Esto es:

$$C_{6,3} = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 20 \text{ maneras.}$$

- Como las tres personas restantes ocuparán el tercer vehículo, entonces el número de maneras distintas es:

$$84 \cdot 20 \cdot 1 = 1680 \text{ maneras.}$$

R: Las nueve personas restantes pueden acomodarse en los tres vehículos de 1680 maneras distintas.

4. Comprueba la respuesta

- Verifica que el número de maneras distintas en que pueden acomodarse los pasajeros en los tres vehículos, si se tiene en cuenta su posición dentro de cada uno, es:

362 880.

Aplica la estrategia

1. El registro de inventario que realiza una empresa interventora utiliza series con una letra inicial seguida de tres números que pueden repetirse. ¿Cuántas series de registro pueden obtenerse si el número cero no puede incluirse?

   a. Comprende el problema

   ....

   ....

   b. Crea un plan

   ....

   ....

   c. Ejecuta el plan

   ....

   ....

   d. Comprueba la respuesta

   ....

   ....

Resuelve otros problemas

2. Dos vendedores de vehículos vendieron en el último semestre 5, 4, 5, 6, 7, 5 y 4, 5, 4, 6, 7, 6 automóviles, respectivamente. En promedio, ¿cuál de los dos es el mejor vendedor?

3. Cuatro amigos se encuentran después de muchos años y deciden ir a almorzar para celebrar. El restaurante les ofrece una mesa para cuatro. ¿De cuántas formas diferentes pueden acomodarse en la mesa?

Formula problemas

4. Inventa un problema que involucre la siguiente información y resuélvelo.

   "Para ir de Quito a Machala, Andrés debe pasar por Guayaquil. A Guayaquil puede ir en avión, en carro particular o en transporte público y de Guayaquil a Machala solo en avión o en transporte público".

Prueba Ser Estudiante

A continuación se presentan ejercicios con cuatro alternativas de solución, de las cuales, una sola es la correcta. Señala en la tabla de respuestas, el literal que consideres correcto.

1. Una variable estadística es el conjunto de valores que toma un carácter estadístico cuantitativo y puede ser continua o

A. discreta

B. media

C. población

D. probabilidad

2. La media aritmética de los resultados registrados en la siguiente tabla referentes a la longitud de salto de un grupo de atletas es:

Salto (m)	[2; 2,5)	[2,5; 3)	[3; 3,5)	[3,5; 4)
Número de atletas	6	12	15	4

A. 2,98

B. 9,25

C. 8,98

D. 3,95

3. La moda de los siguientes datos 2, 4, 5, 23, 9, 46, es:

A. 46

B. 23

C. 2

D. no hay moda

4. El dato que falta en la distribución 7, 12, 15, 22, 23, 28, 32, para que la media sea 18, es:

A. 10 B. 7

C. 5 D. 20

5. Encuentra los cuartiles Q_1, Q_2 y Q_3 para los siguientes conjuntos de datos: 3, 2, 4, 3, 1, 2, 6, 3, 5, 5, 1, 3, 2.

A. $Q_1 = 3$, $Q_2 = 3$, $Q_3 = 4{,}5$ B. $Q_1 = 2$, $Q_2 = 3$, $Q_3 = 4{,}5$

C. $Q_1 = 2$, $Q_2 = 3$, $Q_3 = 4{,}5$ D. $Q_1 = 2$, $Q_2 = 4$, $Q_3 = 3$

6. La diferencia entre el mayor valor y el menor valor de los datos se denomina:

A. rango

B. varianza

C. frecuencia

D. intervalo

7. En la siguiente tabla se muestra el número de ausencias de los estudiantes de décimo EGB a una clase a lo largo de un mes. ¿Cuál es el rango de los datos?

Número de estudiantes	10	7	6	2	1	4
Número de ausencias	0	1	2	3	4	5

A. 4

B. 5

C. 7

D. 6

8. Salomé tiene dos pantalones deportivos, cuatro camisetas y tres pares de tenis. ¿De cuántas formas distintas puede vestirse para hacer ejercicio?

A. 24

B. 12

C. 32

D. 16

9. ¿Cuántos números de dos dígitos pueden escribirse con los dígitos {2,4,6,8}?

A. 16

B. 8

C. 24

D. 32

10. Seis amigos van al cine y compran seis entradas con asientos consecutivos. ¿De cuántas maneras pueden sentarse?

A. 620

B. 520

C. 720

D. 820

11. En un curso de 22 estudiantes, todos quieren sentarse en los cinco asientos de la primera fila. ¿De cuántas formas puede asignar el profesor esos asientos?

A. 3 140 060

B. 3 160 070

C. 3 260 080

D. 3 160 080

12. El valor de la expresión $\binom{49}{31} + \binom{49}{32}$ es:

A. $\binom{32}{50}$ B. $\binom{50}{32}$

C. $\binom{10}{16}$ D. $\binom{16}{10}$

13. Simplifica esta expresión:

$$\frac{\binom{15}{9} + \binom{15}{10}}{\binom{8}{7}}$$

A. 1 000 B. 1 015

C. 1 001 D. 1 008

14. Se lanzan simultáneamente un dado cúbico con las caras numeradas del 1 al 6 y una perinola octagonal con cuatro colores distintos. ¿Cuál es la probabilidad de obtener un color determinado y un número par?

A. $\frac{1}{4}$

B. $\frac{1}{2}$

C. $\frac{1}{8}$

D. $\frac{1}{12}$

15. En un teatro se ofrecen seis funciones semanales. En una semana asistieron en promedio 1350 personas. Si de lunes a viernes asistieron 1600, 1180, 1600, 1150 y 1100 personas, ¿cuántas personas asistieron el último día?

A. 2 400 personas

B. 1 070 personas

C. 1 700 personas

D. 1 470 personas

16 Si las matrículas para motos se representan con tres letras y dos números, ¿cuántas motos pueden matricularse en este sistema?

A. 6 340 000

B. 7 290 000

C. 8 670 000

D. 9 625 000

Tabla de respuestas

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A
B	B	B	B	B	B	B	B	B	B	B	B	B	B	B	B
C	C	C	C	C	C	C	C	C	C	C	C	C	C	C	C
D	D	D	D	D	D	D	D	D	D	D	D	D	D	D	D

La importancia del desarrollo sostenible

Cumbre de la Tierra

La Conferencia de las Naciones Unidas sobre el Medio Ambiente y el Desarrollo, celebrada en el mes de junio de 1992 en Río de Janeiro y conocida como Cumbre de la Tierra, tuvo como meta fundamental lograr que el tema ambiental se convirtiera en la columna vertebral del desarrollo para transformar los estilos y las políticas sectoriales y económicas, salvaguardando la integridad ecológica del planeta y dando un mayor contenido social y de equidad global al desarrollo.

La definición más conocida de **desarrollo sostenible** se presentó en dicha conferencia y está basada en la definición de Gro Harlem Brundtland (primera ministra de Noruega en 1996):

> **"El desarrollo que asegura las necesidades del presente sin comprometer la capacidad de las futuras generaciones para enfrentarse a sus propias necesidades".**

Intuitivamente una actividad sostenible es aquella que se puede mantener. Por ejemplo, talar los árboles de un bosque asegurando la repoblación es una actividad sostenible, pero consumir petróleo no es sostenible con los conocimientos actuales.

Hoy se sabe que una buena parte de las actividades humanas no son sostenibles a medio ni a largo plazo tal y como están planteadas actualmente.

Los problemas planteados en la Cumbre involucran los recursos del planeta y tienen un denominador común: el funcionamiento del actual sistema económico. Un sistema económico basado en la máxima producción, el consumo, la explotación ilimitada de recursos y el beneficio como único criterio es insostenible. Nuestro planeta es limitado y por tanto no puede suministrar indefinidamente los recursos que este tipo de explotación exigiría.



SM Ediciones

> **"Un desarrollo real, que permita que las condiciones de vida de las personas mejoren, pero haciendo una explotación racional del planeta y cuidando el medio ambiente puede conducirnos a un desarrollo sostenible".**

Desarrolla tus destrezas

Administración de recursos

1. Lee el siguiente apartado de un artículo sobre el reciclaje.
2. Investiga sobre otras empresas que apoyen el desarrollo sostenible en Ecuador.
3. Divulga la importancia del desarrollo sostenible a tus compañeros de otros grados.

Reciclar Cia.Ltda. es una de las empresas recicladoras que existen en Ecuador con una trayectoria de más de 10 años en el mercado nacional e internacional. Los principales servicios que ofrece esta empresa son compra de papel, cartón, plásticos, metales reciclables y venta de materias primas recicladas para uso industrial.

Reciclar Cia.Ltda. está comprometida para luchar contra un mundo sin contaminación.

http://www.reciclar.com.ec/

Características de un desarrollo sostenible



En Ecuador...

En el año 2015, se promovió la cultura del reciclaje. El objetivo es minimizar los impactos que genera la contaminación de los desechos. Como parte de las acciones, en febrero, aprovechando el feriado de Carnaval en las playas más visitadas de Manabí y Esmeraldas, brigadas del Ministerio de Ambiente informaron a la ciudadanía sobre la importancia de reciclar. Además se colocaron basureros en los sitios de mayor afluencia. Por eso se ha declarado al 2015 como el Año del Reciclaje.

Reducir, la mejor alternativa

Reciclar y reutilizar son dos excelentes iniciativas, no obstante, la mejor alternativa es reducir nuestro consumo; al hacer esto ya no será necesario reciclar y reutilizar tanto. Reducir implica pensar en lo que en realidad necesitamos. Otra forma de reducir es adquirir artículos de buena calidad, los artículos de bajo costo son más accesibles pero, en muchas ocasiones, terminan pasando una alta factura al planeta Tierra.

Pregunta tipo Saber

Observa la siguiente información.



En una planta de relleno sanitario se disponían de 130 toneladas de residuos sólidos, y en el 2014 se recuperaron 2,9 toneladas de residuos sólidos aprovechables.

Con relación a la anterior información, no es cierto que:

A. Se aprovechó aproximadamente el 2,23%.

B. Se aprovecharon 2 900 kilogramos.

C. Se aprovechó casi el 10% de los residuos.

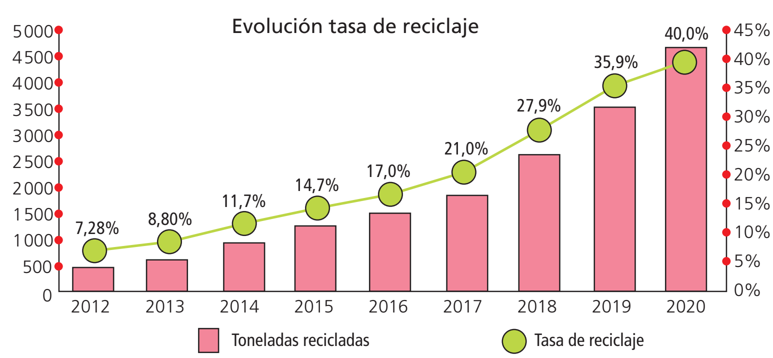
D. Se aprovechó entre el 2% y el 3% de los residuos.

Desarrolla tus destrezas

Trabajo en grupo

4. Analicen la gráfica de la derecha. En ella se presenta la proyección de una empresa en América Latina, empresa que propone para el 2020 reciclar el 40% de los empaque que produce.

5. Averigua si hasta ahora, se han cumplido las metas planteadas en cuanto a la cantidad de empaques reciclados.



Habilidades digitales

Argumenta y defiende tus ideas en foros en línea

Investigar información confiable para discutir un tema en los foros de Google te permite desarrollar argumentos a favor y en contra de una temática específica. En esta actividad aprenderás a abrir tu propio foro de discusiones, administrarlo e invitar a personas para que argumenten a favor o en contra de tus ideas.

1 Inicia tu sesión

a. Ingresa con tu navegador a la dirección https://groups.google.com/forum/ e inicia sesión con tus datos de Gmail.

b. Selecciona la opción *Crear grupo*.

c. Completa los datos solicitados en el formulario con los datos de tu foro: nombre y apellido. Luego, describe brevemente los usos que darás a tu foro. Por tipo de grupo selecciona *Foro web* y coloca todas las opciones en *Público*.

d. Oprime el botón *Crear*, escribe el código de verificación y espera la ventana de *Felicitaciones*.



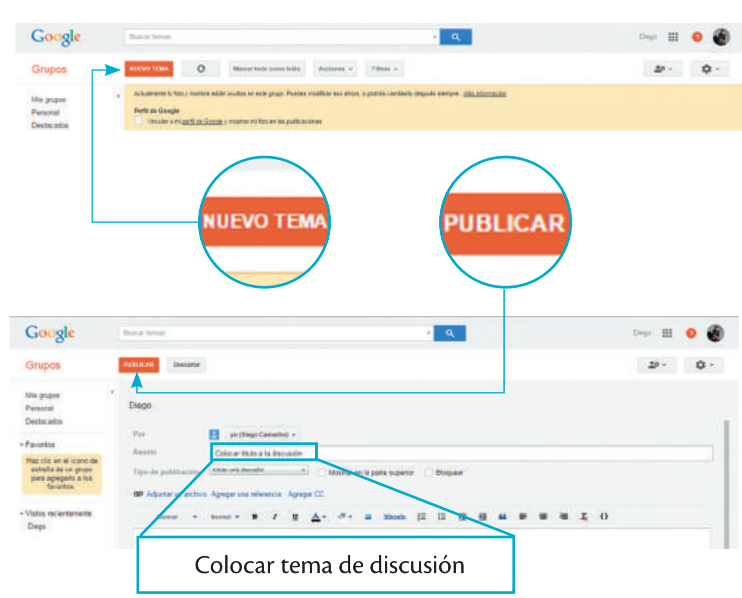
2 Inicia un nuevo tema para discutir en tu foro

a. En la siguiente ventana selecciona la opción *Nuevo tema*.

b. Escribe un título llamativo para tu discusión. Por ejemplo: "Probabilidad de sucesos compuestos".

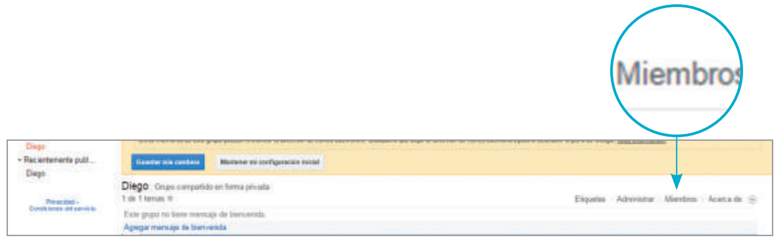
c. Como tema de discusión, desarrolla un ejemplo de cómo utilizarías las definiciones de probabilidad para resolver problemas de estadística.

d. Oprime el botón *Publicar*.

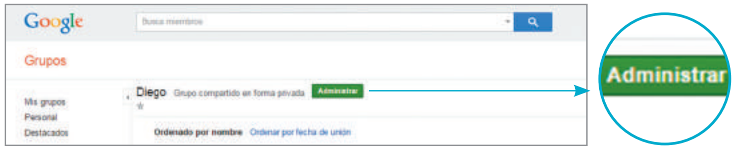


3 **Invita** a tus compañeros a visitar y opinar en tu foro

a. Selecciona la opción *Miembros* en la parte inferior de la página.



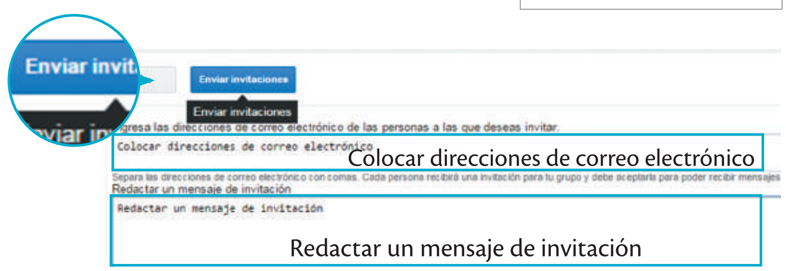
b. En la siguiente pantalla, selecciona el botón *Administrar*.



c. Fíjate en una pequeña pestaña en la parte izquierda de la pantalla y oprime la flecha para desplegar el menú.



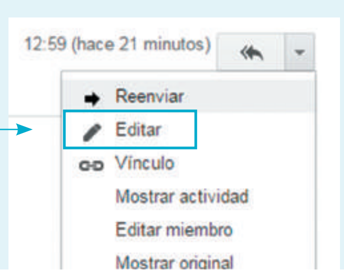
d. Selecciona del menú la opción *Invitar miembros*; escribe las direcciones de correo electrónico de tus compañeros y redacta un mensaje de invitación. Espera que tus compañeros te inviten y debate con ellos vía web.



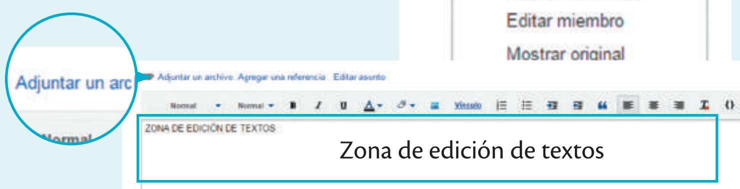
Aprende más

Inserta un archivo para ampliar los temas.

a. Ingresa a tu foro y da clic sobre la opción *Editar* en el menú lateral.



b. En el menú de edición del foro, elige la opción *Adjuntar un archivo* e incluye un documento en Word para ampliar la temática discutida.



Evaluación de la unidad

Terminología estadística

Ejercitación

1. Determina el tipo de variable para cada uno de los siguientes casos.

a. El número de ejercicios que tiene un examen de matemáticas.

b. El deporte favorito de un grupo de estudiantes de grado noveno.

c. El número de hijos que tiene cada una de las familias de Quito.

d. El tiempo que tarda en llegar una ruta de transporte público al terminal.

e. La medida de las fronteras de Ecuador con cada uno de los países vecinos.

Medidas de tendencia central

Razonamiento

2. A partir de la información, responde verdadero (V) o falso (F), según corresponda.

La administración de una torre de apartamentos está interesada en determinar el consumo de agua en una muestra de quince apartamentos de la torre. Los datos suministrados en metros cúbicos son:

18	14	12
15	11	19
12	22	14
15	14	16
18	13	16

a. El mínimo vital de consumo de agua está estipulado en 12 m^3. El porcentaje de apartamentos que están por debajo del mínimo vital es del 20 %. ☐

b. En promedio, el consumo de los apartamentos consultados es de 15,5 m^3. ☐

c. El consumo promedio en la ciudad es de 14,5 m^3. En la torre, más del 50% de los apartamentos consultados está por encima del promedio. ☐

Cuartiles

Comunicación

3. Calcula los cuartiles correspondientes a los datos presentados en la siguiente tabla.

Lu	Ma	Mi	Ju	Vi	Sá	Do
46	30	48	55	57	40	43

Medidas de dispersión

Ejercitación

4. Selecciona la respuesta correcta.

Una ruta de transporte público relaciona el número de pasajeros que un vehículo transporta a diario. Los datos de la última semana aparecen en la siguiente tabla.

Lu	Ma	Mi	Ju	Vi	Sá	Do
436	460	425	445	421	495	412

La desviación estándar de los datos es:

a. 5,31

b. 28,3

c. 56,6

d. 686, 85

Diagrama de árbol

Resolución de problemas

5. Un equipo de fútbol participa en un torneo clasificatorio y debe jugar cinco partidos. Determina el número de eventos posibles si en cada partido debe haber un ganador.

Permutaciones sin repetición

Comunicación

6. Identifica el número de eventos posibles que pueden darse para completar las vacantes de presidente y vicepresidente de una compañía si para los cargos se postulan cinco personas.

Resolución de problemas

7. En un concurso musical se premiarán los tres primeros puestos. Determina el número de eventos que pueden darse para definir el primer, segundo y tercer puesto si participan diez artistas.

Variaciones y combinaciones

Ejercitación

8. Elige la respuesta correcta.

El equipo de jugadores de baloncesto del colegio cuenta con ocho estudiantes. El número de posibles alineaciones titulares en un juego son:

a. 8

b. 20

c. 56

d. 6 720

Números combinatorios

Modelación

9. Determina la diferencia de la siguiente operación $\binom{12}{5} - \binom{12}{4}$ e indica la respuesta correcta.

a. 12

b. 220

c. 297

d. 792

Experimentos aleatorios. Sucesos

Razonamiento

10. Relaciona cada evento con el tipo de suceso correspondiente al trabajo con una baraja de póker.

a. Sacar el rey de corazones.	Seguro
b. Sacar una carta de espadas.	Compuesto
c. Sacar una carta de la baraja.	Elemental
d. Sacar una carta de picas.	Aleatorio
e. Sacar varias cartas de la baraja.	Imposible

11. Se lanza un dado dodecaédrico y se anota el resultado de la cara superior. Se consideran los siguientes sucesos:

A = "Salir un número múltiplo de 4" = {4, 8, 12}
B = "Salir un número menor que 5" = {1, 2, 3, 4}, el suceso "Salir un número menor que 5", es:

a. $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 8, 12\}$

b. $A \cap B = \{4\}$

c. $A \cap B = \varnothing$

d. $A \cup B = \varnothing$



Los derechos y los deberes de un ciudadano de paz



Soy ciudadano

- Comprendo que los mecanismos de participación propician decisiones y, aunque no siempre esté de acuerdo con ellas, sé que me rigen.

Acércate al tema

- En la Constitución de la República del Ecuador del año 2008, el artículo 6 menciona:



"Todas las ecuatorianas y los ecuatorianos son ciudadanos y gozarán de los derechos establecidos en la Constitución.

La nacionalidad ecuatoriana es el vínculo jurídico político de las personas con el Estado, sin perjuicio de su pertenencia a alguna de las nacionalidades indígenas que coexisten en el Ecuador plurinacional.

La nacionalidad ecuatoriana se obtendrá por nacimiento o por naturalización y no se perderá por el matrimonio o su disolución, ni por la adquisición de otra nacionalidad."

Ciudadano	Es aquel individuo perteneciente o relativo a la ciudad. Es la persona que forma parte de una comunidad política.
Ciudadanía	Es el conjunto de derechos y deberes que condicionan al ciudadano en su relación con la sociedad en la que vive. Ciudadanía es la condición que se otorga al ciudadano por ser miembro de una comunidad organizada.

Actividades

1. ¿Qué sabes de la ciudadanía?
2. ¿Puedes perder la ciudadanía? ¿Por qué?
3. ¿En qué momento me convierto en un ciudadano de mi país?

¿? Y tú ¿qué harías?

Al ser ciudadano de un país, el individuo establece lazos emocionales con un lugar, una nación y genera comportamientos y relaciones de respeto hacia lo público y lo privado.

Es tu deber ser un buen ciudadano en tu colegio mediante la promoción de la educación en ciudadanía, la participación y la democracia en la institución educativa. Los ciudadanos también ejercemos algunos deberes, como participar en las elecciones para elegir a nuestros representantes en el gobierno, sin embargo, existen algunas actividades que resultan peligrosas para la democracia, como la compra y la coacción de los votos, y, en algunos casos, la manipulación de la información. Y tú ¿qué harías si te dieras cuenta de que un grupo de estudiantes de tu colegio está haciendo fraude en la elección del gobierno escolar?

En este proyecto escribirás un artículo de opinión y harás una encuesta en la que puedas analizar el conocimiento que los estudiantes del colegio tienen acerca de los derechos y deberes del ser ciudadano.



http://www.avn.info.ve

Art. 62. Las personas en goce de derechos políticos tienen derecho al voto universal, igual, directo, secreto y escrutado públicamente, de conformidad con las siguientes disposiciones:

1. El voto será obligatorio para las personas mayores de dieciocho años. Ejercerán su derecho al voto las personas privadas de libertad sin sentencia condenatoria ejecutoriada.

2. El voto será facultativo para las personas entre dieciséis y dieciocho años de edad, las mayores de sesenta y cinco años, las ecuatorianas y ecuatorianos que habitan en el exterior, los integrantes de las Fuerzas Armadas y Policía Nacional, y las personas con discapacidad.

Constitución del la República del Ecuador, 2008.

Desarrolla el plan de trabajo

Trabajo individual

- Identifica el objetivo del proyecto.
- Consulta con el profesor de Lengua y Literatura cómo debe ser la estructura de un artículo de opinión.

Trabajo en grupo

- Formen grupos pequeños de trabajo seleccionen uno de los textos que se relacionan a continuación:

  a. "Los desafíos de la educación en derechos humanos y en ciudadanía"

  b. "Me integro con mi ciudad: una propuesta de construcción de ciudadanía desde la primera infancia"

  c. "Ciudadanía, convivencia, diversidad cultural: por una escuela crítica y exigente frente a los medios de comunicación y frente a sí misma"

  d. "La escuela de derechos humanos: un aporte para construir convivencia ciudadana y una nueva cultura política"

- Una vez seleccionado el texto y escriban un artículo de opinión.
- Luego, realicen una encuesta en el colegio sobre los derechos y los deberes de un ser ciudadano y completen el artículo de opinión incluyendo los resultados de la misma.
- Concierten con el profesor los criterios de evaluación. ¿Cómo se va a evaluar? ¿Quién o quiénes van a evaluarlos? ¿Qué aspectos se tendrán en cuenta?

Trabaja con el área de matemáticas

Las encuestas son estudios estadísticos en los que la información se obtiene de la realización de un cuestionario a una muestra de personas.
Para la realización de la encuesta hay que tener en cuenta:

a Planificación de la encuesta

1. Se identifica y se define el problema o asunto de interés. Responde la pregunta: "¿Qué voy a preguntar? ¿Qué información quiero obtener?"
2. Se elabora un plan de trabajo. "¿Cómo voy a preguntar?"
3. Se desarrolla el plan. "¿A quién voy a preguntar?"
4. Se valoran los resultados. "¿Qué voy a hacer con los datos?"



b Tabulación de la encuesta

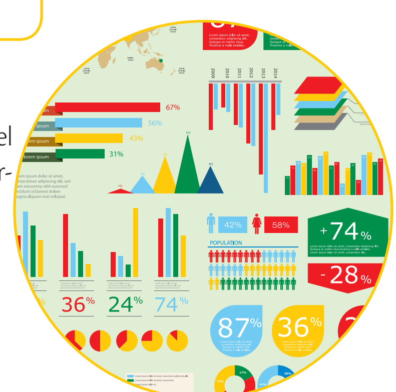
En los cuestionarios de las encuestas pueden formularse varios tipos de preguntas.

- **Abiertas**: son las que dejan un espacio amplio para que el encuestado aporte sus opiniones acerca de la pregunta.
- **Cerradas**: son las del tipo test y respuesta única, como la de responder Sí o No, o la de elegir una opción entre un número predefinido de respuestas posibles.
- **Parcialmente cerradas**: son las de respuesta múltiple, que permiten al encuestado señalar varias respuestas dentro de una lista de posibilidades.

c Procesamiento de los datos

A los datos recogidos se le aplican las herramientas de la estadística para hallar la frecuencia absoluta, la frecuencia relativa, las medidas de tendencia central, las medidas de dispersión, el rango y la varianza.

d Presentación de los resultados en tablas y gráficos



Los resultados de la encuesta pueden presentarse en tablas y gráficos de pastel o de barras. Debe elaborarse la ficha técnica al final de la encuesta y es importante que incluya:

- Marco de referencia: local, regional, nacional, mundial.
- Características de los encuestados.
- Procedimientos de muestreo y selección de los encuestados.
- Propiedades de la muestra: tamaño, error muestral, nivel de fiabilidad.
- Fecha de realización y duración de la recolección de datos.
- Autores de la encuesta.

Da a conocer tu trabajo

La presentación de los trabajos que conforman el proyecto está dividida en dos momentos: uno, la socialización de los artículos de opinión y, dos, la socialización de los resultados de la encuesta.

- **Primer momento:** se intercambiarán los artículos entre los grupos, los cuales leerán el artículo de opinión de sus compañeros y lo valorarán a partir de los criterios previamente establecidos.
  1. El profesor, aleatoriamente, escogerá entre tres y cinco textos para leerlos frente al grupo.
  2. El profesor escogerá un espacio del salón que se denominará "El rincón de la ciudadanía", en donde se rotarán semanalmente los textos elaborados por los estudiantes.
  3. Los textos rotarán durante un bimestre. Forma parte del ejercicio de ser un buen ciudadano preservar los textos en buen estado y no escribir sobre ellos.
- **Segundo momento**: cada grupo presentará a todo el curso la ficha técnica de su encuesta y las tablas y los gráficos correspondientes.
  1. Cada grupo realizará un breve análisis de los resultados de la encuesta.
  2. Cada grupo debe estar atento a la presentación de los demás para adelantar la evaluación correspondiente.

Una vez finalizada la actividad, es importante que los afiches, las pancartas y los demás materiales alusivos al tema permanezcan algunas semanas en el colegio, con el fin de dar continuidad a la sensibilización de la población estudiantil.



"Yo soy un ciudadano, no de Atenas o Grecia, sino del mundo". Sócrates.

Evalúa el trabajo realizado

De acuerdo con los criterios de evaluación establecidos para el proyecto, evalúenlo con los compañeros, con el profesor y de manera individual.

Comprométete

Según el trabajo que realizaste en este proyecto, amplía la lista de los compromisos que asumirás.

1. Me comprometo a participar activamente en la democracia de mi colegio.
2. Voy a defender los derechos humanos de mis compañeros para que haya una sana convivencia.
3. ______________________________
   ____
4. ______________________________
   ____

Evaluación Final

1. De los siguientes números, es racional:

   A. π

   B. $\frac{-2}{3}$

   C. 2i

   D. $\sqrt{-4}$

2. Un carro recorre 526,62 km de Quito a la ciudad de Machala. ¿Cuál es la mejor aproximación a las unidades de la distancia entre las dos ciudades?

   A. 526,6 **B.** 528

   C. 527,6 **D.** 527

3. Paulina puede digitar cerca de 30 palabras por minuto. ¿Cuántas horas le tomará digitar un texto de $2{,}4 \cdot 10^4$ palabras?

   A. aproximadamente 1 hora

   B. aproximadamente 3 horas

   C. aproximadamente 13 horas

   D. aproximadamente 31 horas

4. Al simplificar $\frac{(64)^{\frac{1}{2}}}{\sqrt[55]{-1}}$, se obtiene:

   A. −8 **B.** 8

   C. 32 **D.** – 32

5. ¿Cuál es el perímetro en metros de un terreno rectangular cuyos lados son $\sqrt[5]{243a}$ m y $\sqrt[5]{1\,024a}$ m?

   A. $14\sqrt[5]{a}$

   B. 14 a

   C. $4\sqrt[5]{a}$

   D. $a\sqrt[5]{14}$

6. Cerca de la superficie terrestre, el tiempo t que tarda un objeto en caer una distancia d, está dado por la expresión $t = \frac{1}{4} d^{\frac{1}{2}}$, donde t se mide en segundos y d se mide en pies. El tiempo que tardará un objeto en caer 256 pies, es de:

   A. 8 segundos

   B. 4 segundos

   C. 16 segundos

   D. 2 segundos

7. Al racionalizar $\frac{2}{\sqrt{3}}$, se obtiene:

   A. $\frac{\sqrt{3}}{3}$ **B.** $\frac{3\sqrt{3}}{3}$

   C. $\frac{2\sqrt{3}}{3}$ **D.** $\frac{\sqrt{3}}{2}$

8. De las siguientes funciones, ¿cuáles son decrecientes?

   a. $h(x) = -x - 1$ **b.** $g(x) = x - 1$ **c.** $p(x) = -2x - 1$

   A. a y c

   B. a y b

   C. b y c

   D. todas son decrecientes

9. De las siguientes funciones, ¿cuáles son pares?

   a. $g(x) = x^2$ **b.** $k(x) = x^2 + 1$ **c.** $p(x) = x^6$

   A. a y b

   B. b y c

   C. a y c

   D. todas son pares

Tabla de respuestas

1	2	3	4	5	6	7	8	9
A	A	A	A	A	A	A	A	A
B	B	B	B	B	B	B	B	B
C	C	C	C	C	C	C	C	C
D	D	D	D	D	D	D	D	D

10. Por el alquiler de una buseta para 10 personas, se cobra \$ 30 diarios más \$ 4 por kilómetro. ¿ Cuál es la función que relaciona el costo diario del alquiler con el número de kilómetros?

A. $y = 4x + 30$ **B.** $y = 30x + 4$

C. $y = x + 30$ **D.** $y = 4x - 30$

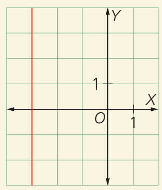
11. De la siguiente gráfica, ¿cuál es la recta correspondiente?

A. $x = -4$

B. $x = -3$

C. $x = \ \ 3$

D. $x = \ \ 4$



12. La recta que pasa por los puntos (2, − 6) y (− 3, 14) tiene por ecuación:

A. $y = 4x + 2$

B. $y = 4x - 2$

C. $y = -4x + 2$

D. $y = -4x - 2$

13. Si en el sistema $\begin{cases} 7m + 3n = 15 \\ 5m + 6n = 27 \end{cases}$, se aplica el método de igualación, se obtiene:

A. $m = 7; n = 3$

B. $m = 3; n = 7$

C. $m = 3; n = 2$

D. $m = 2; n = 3$

14. La diferencia entre dos números es 5; y si se suman, el total es 29. ¿Cuáles son los dos números?

A. 17 y 12

B. 19 y 14

C. 10 y 19

D. 13 y 16

15. Si en el sistema $\begin{cases} 3m + 2n = -22 \\ 5m + 8n = -60 \end{cases}$, se aplica el método de Cramer, se obtiene:

A. $m = \ \ 3; n = \ \ 4$

B. $m = -4; n = -5$

C. $m = -1; n = \ \ 2$

D. $m = -12; n = 14$

16. Si en el sistema $\begin{cases} 2x + 3y = 13 \\ 4x - 4y = -4 \end{cases}$, se aplica el método de Gauss, se obtiene el siguiente sistema escalonado:

A. $\begin{cases} 2x + 3y = 13 \\ y = 3 \end{cases}$

B. $\begin{cases} 2x + 3y = 13 \\ y = -3 \end{cases}$

C. $\begin{cases} 2x + 3y = 13 \\ -4y = -4 \end{cases}$

D. $\begin{cases} 2x + 3y = 13 \\ 4y = -4 \end{cases}$

17. Un rectángulo tiene un perímetro de 196 metros. Si mide 26 metros más de largo que de ancho, ¿cuáles son sus dimensiones?

A. 62 metros de largo y 36 metros de ancho

B. 20 metros de largo y 46 metros de ancho

C. 46 metros de largo y 72 metros de ancho

D. 64 metros de largo y 64 metros de ancho

18. La solución de la inecuación $-4x - 12 > 8$ es:

A. $x < -5$

B. $x < -4$

C. $x > -5$

D. $x > -4$

Tabla de respuestas

10	11	12	13	14	15	16	17	18
A	A	A	A	A	A	A	A	A
B	B	B	B	B	B	B	B	B
C	C	C	C	C	C	C	C	C
D	D	D	D	D	D	D	D	D

Evaluación Final

19. ¿Cuál es el menor número entero múltiplo de 4, que satisface la siguiente inecuación: $x + 2 < 3x + 1$?

A. 8

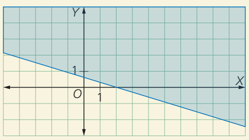
B. 4

C. 16

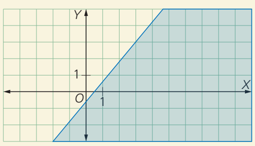
D. 12

20. La gráfica correspondiente a la inecuación $3x - 2y > 1$ es:

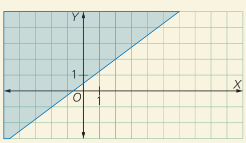
A.



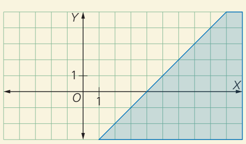
B.



C.



D.



21. La solución a la ecuación $5x^2 - 15$ es:

A. $x_1 = \sqrt{5}$, $x_2 = -\sqrt{5}$

B. $x_1 = \sqrt{3}$, $x_2 = -\sqrt{3}$

C. $x_1 = \sqrt{5}$, $x_2 = -\sqrt{3}$

D. $x_1 = \sqrt{3}$, $x_2 = -\sqrt{5}$

22. El largo de una sala rectangular es 3 m mayor que el ancho. Si el ancho aumenta 3 m y el largo aumenta 2 m, el área se duplica. ¿Cuál es el área original de la sala?

A. 25 m^2

B. 16 m^2

C. 81 m^2

D. 40 m^2

23. La ecuación cuadrática cuyas raíces son $x_1 = 3$; $x_2 = -5$, corresponde a:

A. $x^2 + x + 15 = 0$

B. $x^2 + 5x - 3 = 0$

C. $x^2 + 3x - 5 = 0$

D. $x^2 + 2x - 15 = 0$

24. La diferencia de dos números es igual a 3 y si al cuadrado del primero se le resta el doble del cuadrado del segundo se obtiene 17. ¿Cuáles son los números?

A. 5 y 2

B. 8 y 4

C. 6 y 1

D. 4 y 9

25. ¿Cuál de las siguientes funciones, no es función potencia:

A. $f(x) = 2$

B. $f(x) = x$

C. $f(x) = -3x^2$

D. $f(x) = 3x^2 - 2$

Tabla de respuestas

19	20	21	22	23	24	25
A	A	A	A	A	A	A
B	B	B	B	B	B	B
C	C	C	C	C	C	C
D	D	D	D	D	D	D

26. La medida del ángulo $-60°$ en radianes es:

A. $-\frac{\pi}{6}$ rad

B. $-\frac{\pi}{3}$ rad

C. $-\frac{\pi}{2}$ rad

D. $-\frac{\pi}{8}$ rad

27. El valor de la expresión $\tan 45° - (\cos 60° + \text{sen} 30°)$ es:

A. 1

B. 0

C. 2

D. 3

28. El valor de sen 60°, es:

A. $\frac{1}{2}$

B. $\frac{\sqrt{3}}{2}$

C. $\sqrt{3}$

D. 2

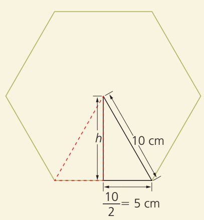
29. La apotema de un hexágono de 10 cm de lado como se muestra en la siguiente figura es:

A. 5,33 cm aproximadamente

B. 8,66 cm aproximadamente

C. 6,55 cm aproximadamente

D. 7,44 cm aproximadamente



30. Encuentra la longitud de la altura sobre la hipotenusa de un triángulo rectángulo cuya hipotenusa mide 10 cm y el cateto menor 6 cm:

A. 4,8 cm

B. 3,4 cm

C. 2,6 cm

D. 6,1 cm

31. El área de un triángulo rectángulo, cuyas proyecciones de sus catetos sobre la hipotenusa miden respectivamente 14,4 cm y 25,6 cm, es:

A. 582 cm^2

B. 275 cm^2

C. 473cm^2

D. 384 cm^2

32. La fórmula para hallar el volumen de un prisma es:

A. $V = A_b \cdot h$

B. $V = \frac{A_b \cdot h}{3}$

C. $V = \frac{3}{A_b . h}$

D. $V = 3\, h_b \cdot A$

33. ¿Cuál es el volumen en cm^3 del sólido de la siguiente figura?

A. $V = 392\pi$

B. $V = 292\pi$

C. $V = 492\pi$

D. $V = 592\pi$

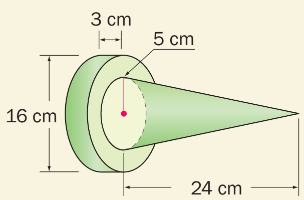


Tabla de respuestas

26	27	28	29	30	31	32	33
A	A	A	A	A	A	A	A
B	B	B	B	B	B	B	B
C	C	C	C	C	C	C	C
D	D	D	D	D	D	D	D

34. El área de una pirámide de altura 8 cm, con base pentagonal regular de 6 cm de lado y de apotema igual a 1 cm, es:

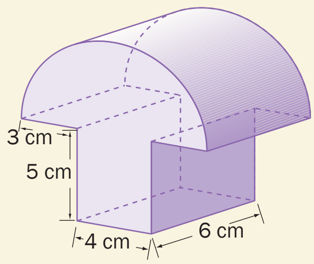
A. 103,8 cm^2

B. 104,8 cm^2

C. 102,8 cm^2

D. 106,8 cm^2

35. ¿Cuál es el volumen de sólido de la siguiente figura?



A. $V = 355{,}6\ cm^3$

B. $V = 332{,}7\ cm^3$

C. $V = 232{,}6\ cm^3$

D. $V = 215{,}7\ cm^3$

36. De las siguientes variables, ¿cuál es cuantitativa continua?

A. Número de faltas de asistencia de estudiantes en un mes

B. Tiempo necesario para contestar una llamada telefónica en un centro de llamadas

C. Comida preferida por niños de un conjunto residencial

D. El color de pelo de los niños que se presentan a una audición musical

37. La media para el siguiente conjunto de datos 2, 4, 5, 23, 9, 46, es:

A. $\overline{x} = 14{,}83$

B. $\overline{x} = 6{,}5$

C. $\overline{x} = 3{,}3$

D. $\overline{x} = 15{,}83$

38. La moda de los siguientes datos 2, 4, 5, 23, 9, 46, es:

A. Mo = 46 **B.** Mo = 23

C. Mo = 2 **D.** no hay moda

39. La mediana para el siguiente conjunto de datos es: 1, 3, 1, 4, 7, 5, 4, 3, 2, 2, 2, 6

A. Me = 3 **B.** Me = 2

C. Me = 3,5 **D.** Me = 4

40. La raíz cuadrada positiva de la varianza se denomina:

A. desviación típica

B. desviación respecto a la media

C. coeficiente de variación

D. rango

41. Los cuartiles Q_1, Q_2, Q_3 de los siguientes datos 7, 12, 15, 22, 23, 28, 32, son:

A. $Q_1 = 12$, $Q_2 = 22$, $Q_3 = 28$

B. $Q_1 = 7$, $Q_2 = 15$, $Q_3 = 32$

C. $Q_1 = 22$, $Q_2 = 23$, $Q_3 = 28$

D. $Q_1 = 15$, $Q_2 = 23$, $Q_3 = 32$

42. En la siguiente tabla se muestra el número de ausencias de los estudiantes de décimo EGB a una clase a lo largo de un mes. ¿Cuál es la varianza?

Número de estudiantes	10	7	6	2	1	4
Número de ausencias	0	1	2	3	4	5

A. $s^2 = 2{,}83$ **B.** $s^2 = 5$

C. $s^2 = 1{,}68$ **D.** $s^2 = 6$

34	35	36	37	38	39	40	41	42
A	A	A	A	A	A	A	A	A
B	B	B	B	B	B	B	B	B
C	C	C	C	C	C	C	C	C
D	D	D	D	D	D	D	D	D

43. ¿Cuántos números de dos dígitos pueden escribirse con los dígitos {2,4,6,8}?

A. 16 **B.** 8

C. 24 **D.** 32

44. En una partida de cartas se reparten inicialmente cuatro a cada jugador. ¿De cuántas formas distintas puede uno de ellos organizar sus cuatro cartas?

A. 16 **B.** 8

C. 24 **D.** 32

45. A una reunión acudieron 20 personas. Para saludarse, dos personas se daban la mano. Si todo el mundo se saludó, ¿cuántos apretones de mano hubo en total?

A. 160 **B.** 130

C. 170 **D.** 190

46. El valor de la expresión $\binom{36}{5}$

A. 763 992

B. 673 992

C. 377 992

D. 376 992

47. Teo quiere preparar jugos combinados con dos frutas diferentes. Tiene plátanos, mangos, moras y fresas. ¿Cuántos sabores puede conseguir?

A. 12

B. 6

C. 4

D. 2

Tabla de respuestas

43	44	45	46	47
A	A	A	A	A
B	B	B	B	B
C	C	C	C	C
D	D	D	D	D

Indicadores para la evaluación:

- Resuelve problemas aplicando las propiedades algebraicas de los números racionales y el planteamiento y resolución de ecuaciones e inecuaciones de primer grado con una incógnita.
- Establece relaciones de orden en el conjunto de los números reales, aproxima a decimales, aplica las propiedades algebraicas de los números reales en el cálculo de operaciones (adición, producto, potencias, raíces) y la solución de expresiones numéricas (con radicales en el denominador) y algebraicas (productos notables).
- Expresa raíces como potencias con exponentes racionales y emplea las potencias de números reales con exponentes enteros para leer y escribir en notación científica información que contenga números muy grandes o muy pequeños.
- Utiliza las distintas notaciones para los intervalos y su representación gráfica, resuelve ecuaciones e inecuaciones de primer grado con una incógnita en R y sistemas de inecuaciones lineales con dos incógnitas de manera gráfica.
- Resuelve problemas mediante la elaboración modelos matemáticos sencillos como funciones.
- Determina el comportamiento (función creciente o decreciente) de las funciones lineales, en base a su formulación algebraica, tabla de valores o en gráficas, valora el empleo de la tecnología.
- Utiliza las Tic para graficar funciones lineales, cuadráticas y potencia(n=1, 2, 3), analizar las características geométricas de la función lineal (pendiente e intersecciones), función potencia (monotonía) y de la función cuadrática (dominio, recorrido, monotonía, máximos, mínimo, paridad); reconoce cuándo un problema puede ser modelado utilizando una función lineal o cuadrática y los resuelve.
- Resuelve problemas que involucren sistemas de dos ecuaciones con dos incógnitas, ecuaciones de segundo grado y la aplicación de las propiedades de las raíces de la ecuación de segundo grado, juzga la validez de las soluciones obtenidas en el contexto del problema.
- Reconoce y aplica las razones trigonométricas y sus relaciones en la resolución de triángulos rectángulos y en situaciones problema de la vida real.
- Resuelve problemas geométricos que requieran del cálculo de áreas de polígonos regulares, áreas y volúmenes de pirámides, prismas, conos y cilindros, aplica como estrategia de solución la descomposición en triángulos y/o la de cuerpos geométricos, explica los procesos de solución empleando la construcción de polígonos regulares y cuerpos geométricos; juzga la validez de resultados.
- Utiliza información cuantificable del contexto social, utiliza variables, aplica niveles de medición, calcula e interpreta medidas de tendencia central (media, mediana y moda), de dispersión (rango, varianza y desviación estándar) y de posición (cuartiles, percentiles), analiza críticamente información a través de tablas o gráficos, resuelve problemas en forma individual.
- Calcula probabilidades de eventos aleatorios empleando combinaciones y permutaciones, el cálculo del factorial de un número.

Apéndice

Más sobre funciones. Prepárate para el BGU

Las Ciencias Sociales es una de las áreas en las que las funciones matemáticas se constituyen en una importante herramienta para encontrar la solución a numerosas cuestiones. Pueden ser útiles para determinar las tasas de crecimiento y decrecimiento de una población, las fluctuaciones bursátiles y el tiempo de reacción ante un estímulo.

- Enumera otras áreas del conocimiento en las cuales el estudio de las funciones se constituye en una herramienta fundamental.



Aprenderás...

- Operaciones con funciones
- Funciones inversas, polinómicas, exponenciales y logarítmicas
- Sucesiones

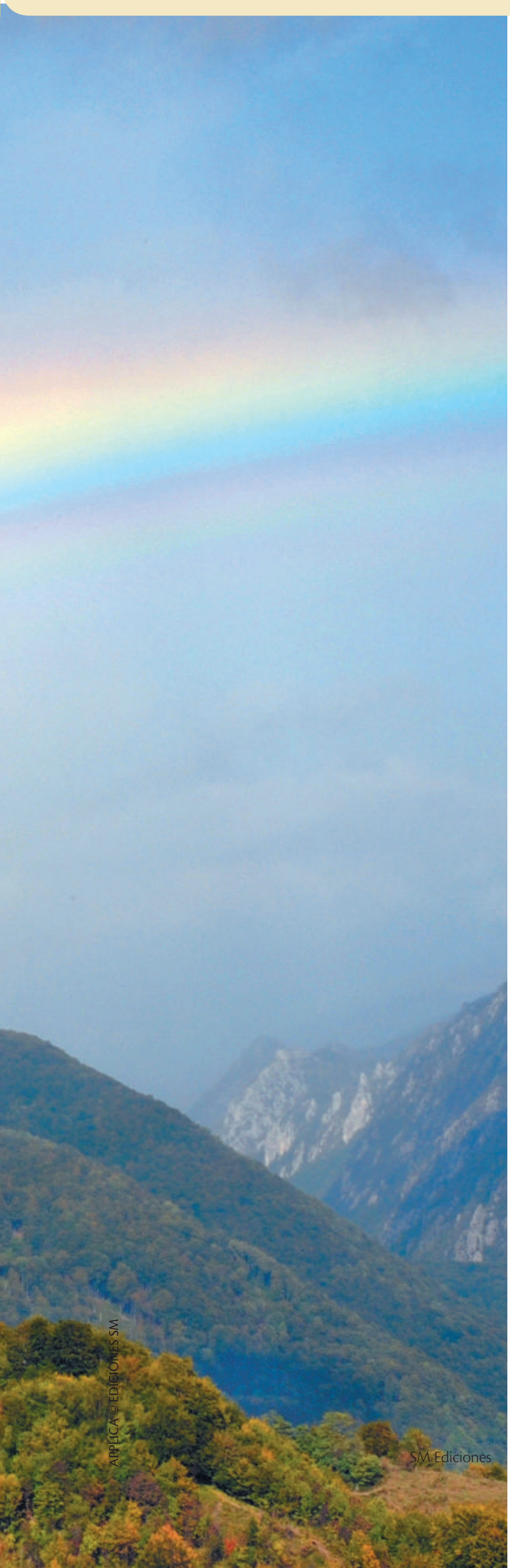
Resolución de problemas

Recursos digitales

LTIC

AI

E



Habilidades lectoras

Las matemáticas del arcoíris

Todas las culturas han atribuido un significado mágico a la aparición del arcoíris cuando asoma el sol y aún está lloviendo. El fenómeno tiene explicación física y matemática a través de las funciones: al encontrarse la luz del sol con las gotitas de lluvia, una parte de la luz rebota por efecto de la reflexión, mientras que otra atraviesa la gota por efecto de la refracción.

El rayo de luz se refracta al pasar del aire al agua; después se refleja en la frontera agua-aire y se vuelve a refractar al pasar del agua al aire. En la refracción, la relación de los ángulos que forman el rayo incidente y el ángulo refractado se da mediante la razón trigonométrica seno y unas constantes dependientes del medio, según la ley de Snell:

$$n_i \operatorname{sen} \theta_i = n_r \operatorname{sen} \theta_r$$

Donde n, índice de refracción del medio, es el cociente entre la velocidad de la luz en el vacío, c, y la velocidad de la luz en el medio en cuestión. Pero lo importante es que el índice de refracción está en función de la frecuencia de la luz, por lo que, para cada color, se tendrá una desviación diferente. Por ejemplo, para el rojo, el verde y el azul, los índices de refracción correspondientes son:

$$n_{\text{rojo}} = 1{,}32986 \qquad n_{\text{verde}} = 1{,}33580 \qquad n_{\text{azul}} = 1{,}34009$$

Por tanto, el azul se desviará más que el verde y este más que el rojo. Los diferentes colores se irán desviando y separándose unos de otros en orden creciente de frecuencia. Por eso, la luz, al atravesar las gotas de agua, se separa en colores. De esta manera se explica la palabra "iris"; ahora solo queda por investigar las razones por las que forma un arco.

Sm Ediciones. (2016). Colombia. Matemática 10.

Actividades

Interpreta

1. ¿En qué consiste el fenómeno del arcoíris?

Argumenta

2. ¿Cuál es la explicación científica de la aparición del arcoíris en el cielo?

Propón

3. René Descartes explicó el fenómeno del arcoíris en 1637. Amplía esta información y averigua cómo se relacionan las funciones con este tema.

1 Operaciones con funciones

Explora

Sean las funciones $f(x) = x^2$, $g(x) = 5x^2$ y $h(x) = \frac{1}{5}x^2$.

- Construye una tabla de valores para $f(x)$, $g(x)$ y $h(x)$. Luego, explica la relación existente entre estas funciones y entre sus gráficas.

1.1 Producto de una función por un número real

Al calcular y registrar algunos valores para las funciones $f(x)$, $g(x)$ y $h(x)$, se obtiene la Tabla 1.

x	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
$f(x)$	9	4	1	0	1	4	9	16
$g(x)$	45	20	5	0	5	20	45	90
$h(x)$	$\frac{9}{5}$	$\frac{4}{5}$	$\frac{1}{5}$	0	$\frac{1}{5}$	$\frac{4}{5}$	$\frac{9}{5}$	$\frac{16}{5}$

Tabla 1

Cada valor de la función $g(x)$ es cinco veces mayor que el valor correspondiente de la función $f(x)$, mientras que cada valor de $h(x)$ es la quinta parte del valor correspondiente de $f(x)$. Es decir:

$$g(x) = 5 \cdot f(x) \Rightarrow g(x) = 5x^2$$

$$h(x) = \frac{1}{5} \cdot f(x) \Rightarrow g(x) = \frac{1}{5}x^2$$

El **producto de un número real k por una función f** es una función kf que asocia, a cada x, k veces el valor de $f(x)$.

$$k \cdot f(x) = (kf)(x)$$

Al representar gráficamente las funciones $f(x)$, $g(x)$ y $h(x)$, se obtienen las curvas de la Figura 1. Allí se encuentra que $g(x)$ es una contracción de la gráfica de $f(x)$ y que $h(x)$ es una dilatación de la gráfica de $f(x)$.

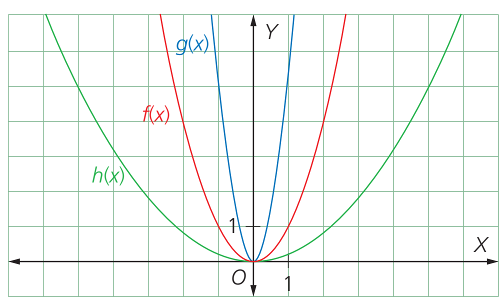


Figura 1

Ejemplo 1

En una práctica de biología y geología encontraron que el número de gusanos de seda que crió cada grupo de trabajo sigue la función $f(x) = x^2 + 1$, donde x es el número de semanas.

Si en el curso hay tres grupos, el número de gusanos que hay en total al final de cada semana será el que aparece en la tercera columna de la Tabla 2. Estos valores corresponden a la función $g(x) = 3f(x)$ que asocia directamente los valores de la tercera columna con los de la primera. En la Figura 2 se observan las gráficas de $f(x)$ y $g(x)$.

x	$f(x)$	$g(x)$
0	1	3
1	2	6
2	5	15
3	10	30
4	17	51
5	26	78

Tabla 2

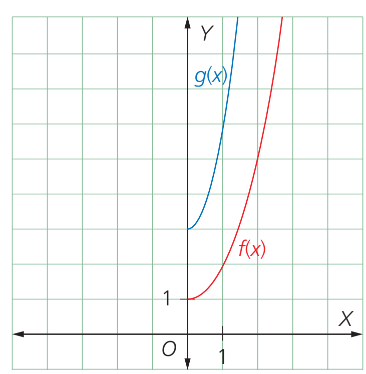


Figura 2

Destreza con criterios de desempeño: Realizar operaciones con funciones de manera algebraica.

1.2 Suma y diferencia de funciones

La **suma de las funciones** f **y** g es otra función $(f + g)$ que a cada x del dominio común de ambas le hace corresponder $f(x)$ más $g(x)$.

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x)$$

Ejemplo 2

Dada las funciones $f(x) = x^2 + 1$ y $g(x) = 3x$, la expresión algebraica correspondiente a la función suma $(f + g)$ se obtiene como sigue:

$$(f + g) = (x^2 + 1) + 3x = x^2 + 3x + 1$$

En la Tabla 3 se encuentran los valores de las funciones $f(x)$, $g(x)$ y $(f + g)(x)$.

x	$f(x)$	$g(x)$	$(f + g)(x)$
−3	10	−9	1
−2	5	−6	−1
−1	2	−3	−1
0	1	0	1
1	2	3	5
2	5	6	11
3	10	9	19

Tabla 3

La **diferencia de dos funciones** f y g es otra función $(f - g)$ que a cada x del dominio común de ambas le hace corresponder $f(x)$ menos $g(x)$.

$$(f - g)(x) = f(x) - g(x)$$

Ejemplo 3

Si $f(x) = 2x^2 - 5x + 1$ y $g(x) = 4x - 3$, entonces:

$$(f - g) = (2x^2 - 5x + 1) - (4x - 3) = 2x^2 - 9x + 4$$

1.3 Producto y cociente de funciones

El **producto de dos funciones** f y g es otra función $f \cdot g$ que, a cada x del dominio común de ambas, le hace corresponder $f(x)$ por $g(x)$.

$$(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$$

Ejemplo 4

Con $f(x) = x^2 + 1$ y $g(x) = -x$, se tiene que:

$$(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x) = (x^2 + 1)(-x) = -x^3 - x$$

Los valores de la cuarta columna de la Tabla 4 son los productos de $f(x)$ por $g(x)$, y corresponden a la función producto $(f \cdot g)(x)$.

El **cociente de dos funciones** f y g es otra función $f \div g$ que, a cada x del dominio común de ambas, le hace corresponder $f(x)$ entre $g(x)$.

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}, g(x) \neq 0$$

Ejemplo 5

La función cociente $\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$, siendo $f(x) = x^2 + 1$ y $g(x) = -x$, es:

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)} = -\frac{x^2 + 1}{x}$$

Las funciones $f \cdot g$ y $f \div g$ solo están definidas en el dominio común de las funciones f y g. Para la función $g \div f$ se deben descartar del dominio común los valores de x que anulan a la función del denominador (Tabla 4).

Ten en cuenta

El dominio de las funciones $f + g$, $f - g$, kf y $f \cdot g$ lo constituye la intersección de los dominios de f y g, es decir, aquellos valores de x comunes de las funciones f y g.

En la función definida como $\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$ el dominio no incluye los valores de x para los cuales $g(x) = 0$.

x	$f(x)$	$g(x)$	$(f \cdot g)(x)$	$\frac{f}{g}(x)$
...	...	...	...	...
−2	5	2	10	2,5
−1	2	1	2	2
0	1	0	0	No está definido
1	2	−1	−2	−2
2	5	−2	−10	−2,5
...	...	...	...	...

Tabla 4

1 Operaciones con funciones

1.4 Composición de dos funciones

La **composición de una función f con otra g** es la función $g \circ f$ definida del siguiente modo.

$$(g \circ f)(x) = g[f(x)]$$

Ten en cuenta

La composición de funciones no es conmutativa; es decir $(g \circ f)(x) \neq (f \circ g)(x)$

Ejemplo 6

Considera las funciones $f(x) = x^2 + 5$ y $g(x) = x^3$.

$$x \xrightarrow{f} x^2 + 5 \xrightarrow{g} (x^2 + 5)^3$$

$$g \circ f$$

La función que asocia a cada x el valor $(x^2 + 5)^3$ se llama **función compuesta** de f y g. Se escribe $g \circ f$ y se lee "g compuesto con f".

Actividades resueltas

Ejercitación

1 Ten en cuenta las funciones $f(x) = \frac{2x}{x + 3}$ y $g(x) = x^2 + 3x + 1$ y encuentra el resultado de las siguientes operaciones.

a. $(2f)(x)$ **b.** $(3g)(x)$ **c.** $(f + g)(x)$

Solución:

a. $(2f)(x) = 2 \cdot f(x) = 2 \cdot \frac{2x}{x + 3} = \frac{4x}{x + 3}$

b. $(3g)(x) = 3 \cdot g(x) = 3(x^2 + 3x + 1) = 3x^2 + 9x + 3$

c. $(f + g)(x) = f(x) + g(x) = \frac{2x}{x + 3} + x^2 + 3x + 1$

La función f no existe en $x = -3$; por lo tanto, las funciones $2f$ y $f + g$ tampoco existen en $x = -3$.

2 Halla la expresión de las funciones $g \circ f$ y $f \circ g$ si $f(x) = x - 5$ y $g(x) = 2x^2 + 1$.

Solución:

$(g \circ f)(x) = g[f(x)] = g[x - 5] = 2(x - 5)^2 + 1 = 2(x^2 - 10x + 25) + 1 = 2x^2 - 20x + 51$

$(f \circ g)(x) = f[g(x)] = f[2x^2 + 1] = 2x^2 + 1 - 5 = 2x^2 - 4$

Desarrolla tus destrezas

Ejercitación

3 Ten en cuenta cada par de funciones y encuentra $f + g$, $f - g$, $f \cdot g$, $\frac{f}{g}$ y sus respectivos dominios.

a. $f(x) = x - 3$, $g(x) = x^2$

b. $f(x) = \frac{2}{x}$, $g(x) = \frac{4}{x + 4}$

c. $f(x) = x^2 + 2x$, $g(x) = 3x^2 - 1$

d. $f(x) = \sqrt{4 - x^2}$, $g(x) = \sqrt{1 - x}$

e. $f(x) = \sqrt{9 - x^2}$, $g(x) = \sqrt{x^2 - 4}$

f. $f(x) = \frac{2}{x + 1}$, $g(x) = \frac{x}{x + 1}$

4 Calcula teniendo en cuenta que $m(x) = \sqrt{x - 1}$, $n(x) = x^2$ y $h(x) = x + 4$.

a. $(m + n)(4)$ b. $(m - n)(4)$

c. $(n + h)(4)$ d. $(h + m)(4)$

e. $(n - h)(4)$ f. $(n - m)(4)$

g. $(h \cdot n)(4)$ h. $(m \cdot h)(4)$

i. $\left(\frac{m}{n}\right)(4)$ j. $\left(\frac{n}{h}\right)(4)$

k. $\left(\frac{m}{h}\right)(4)$ l. $\left(\frac{h}{m}\right)(4)$

Destreza con criterios de desempeño: Realizar operaciones con funciones de manera algebraica.

5 Halla las funciones $f \circ g$ y $g \circ f$, si $f(x)$ y $g(x)$ son las que se indican en cada caso.

a. $f(x) = \frac{x}{x+4}, g(x) = 2x - 1$

b. $f(x) = 2x + 3,\ g(x) = 4x - 1$

c. $f(x) = x - 4, g(x) = |x - 4|$

d. $f(x) = 6x - 5, g(x) = \frac{x}{x+1}$

e. $f(x) = |x|, g(x) = 2x + 3$

f. $f(x) = x^2, g(x) = x + 1$

g. $f(x) = x^2, g(x) = \sqrt{x-3}$

h. $f(x) = \frac{1}{x}, g(x) = 2x + 4$

i. $f(x) = \frac{1}{x^2}, g(x) = x$

6 Considera las funciones $f(x) = x - 5$ y $g(x) = 2 - x^2$. Luego, evalúa cada expresión.

a. $(f \circ g)(x)$ b. $(g \circ f)(x)$

c. $(f \circ f)(x)$ d. $(g \circ g)(x)$

e. $f[g(0)]$ f. $g[f(0)]$

g. $f[f(4)]$ h. $g[g(3)]$

i. $(f \circ g)(-2)$ j. $(g \circ f)(-2)$

k. $(f \circ f)(-1)$ l. $(g \circ g)(2)$

Razonamiento

7 Analiza cada situación y resuelve.

a. Sean las funciones $f(x) = 5x^2 + 3$ y $g(x) = x + 7$.

- Calcula las funciones $g \circ f$ y $f \circ g$.
- ¿Es conmutativa la composición de funciones?

b. Dadas las funciones $f(x) = |x|, g(x) = 3x$ y $h(x) = x^2 + 4$, calcula las siguientes funciones.

$3f$ $f + 2g$

$g \cdot h$ $\frac{g}{h}$

c. Si $f(x) = 3x - 6$ y $g(x) = x^2 + 2x - 4$, calcula lo que se indica en cada caso.

$2f + g$ $4g - 3f$

$f \cdot g$ $\frac{g}{f}$

$f \circ g$ $g \circ f$

8 Encuentra las imágenes de $x = -2$ y $x = 1$, mediante las funciones $(g \circ f)(x)$ y $(f \circ g)(x)$, siendo:

$$f(x) = 2x^2 - 9 \text{ y } g(x) = \frac{1}{2x-1}$$

9 Elabora la gráfica de las funciones que se indican a continuación, si sabes que $f(x) = \sqrt{x-3}$ y $g(x) = \sqrt{x-1}$.

a. $f(x) + g(x)$ b. $f(x) - g(x)$

c. $f(x) \cdot g(x)$ d. $\frac{f(x)}{g(x)}$

e. $f \circ g$ f. $g \circ f$

Modelación

10 Lee y resuelve.

La solución de $f \circ g \circ h$, donde $f(x) = \frac{x}{x+4}$, $g(x) = x^{10}$ y $h(x) = x + 3$ se muestra a continuación:

$$(f \circ g \circ h) = f[g[h(x)]] = f[g(x+3)]$$

$$= f[(x+3)^{10}] = \frac{(x+3)^{10}}{(x+3)^{10}+1}$$

Calcula:

a. $g \circ h \circ f$ b. $h \circ g \circ f$

c. $g \circ f \circ h$ d. $h \circ f \circ g$

e. $f \circ g \circ h$ f. $f \circ h \circ g$

Resolución de problemas

11 En la Figura 3 se representó la siguiente situación.

Un buque que viaja a 20 millas/h con una trayectoria paralela a una orilla recta. El buque está a 6 millas de la orilla y pasa cerca de un faro a mediodía.

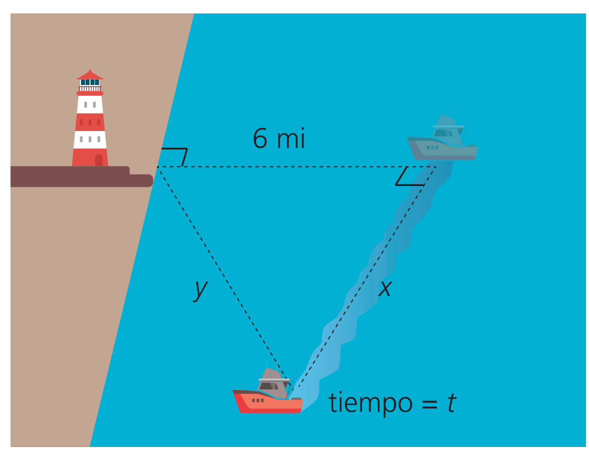


Figura 3

a. Expresa la distancia y del faro y el buque como una función de x, la distancia que ha recorrido el buque a mediodía; es decir, encuentra f de modo que $y = f(x)$.

b. Expresa a x como una función de t, el tiempo transcurrido desde mediodía; es decir, encuentra g tal que $x = g(t)$.

c. Encuentra $f \circ g$ y explica qué representa está función.

2 Funciones inversas

Explora

Sean las funciones:

$f(x) = \sqrt{x+2}$ donde $x \geq -2$

$g(x) = x^2 - 2$ con $x \in \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$

- Calcula las funciones $f \circ g$ y $g \circ f$.

2.1 Definición de función inversa

Se observa que:

- $(f \circ g)(x) = f[g(x)] = f(x^2 - 2) = \sqrt{x^2 - 2 + 2} = x$
- $(g \circ f)(x) = g[f(x)] = g(\sqrt{x+2}\,) = (\sqrt{x+2}\,)^2 - 2 = x$

Se observa que las dos funciones $f \circ g$ y $g \circ f$ asignan a cada valor x el mismo número x. La función que cumple esta propiedad se denomina **función identidad, *i*(*x*)**.

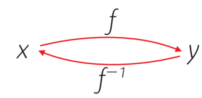
$$(f \circ g)(x) = (g \circ f)(x) = x \Rightarrow f \circ g = g \circ f = i$$

Como al componer las funciones f y g se obtiene la función identidad, se dice que son funciones **inversas** o **recíprocas**.

La función inversa de una función f se representa por f^{-1}.

Dos funciones f y g son **inversas** si se verifica que $f \circ g = g \circ f = i$, siendo i la **función identidad**.

Si la función f transforma el valor x en $y = f(x)$, la función inversa transforma y en x, es decir, $f^{-1}(y) = x$.



Las gráficas de una función f y de su inversa f^{-1} son simétricas con respecto a gráfica de la recta $y = x$.

Ejemplo 1

Retomando las funciones $f(x) = \sqrt{x+2}$, con $x \geq -2$ y $g(x) = x^2 - 2$, con $x \in \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$, se tiene que g "deshace" la transformación que realiza la función f y viceversa. Por ejemplo, $f(-1) = 1$, mientras que, $g(1) = -1$.

Por otra parte, al representar las funciones f y g en el plano cartesiano, se encuentra que sus gráficas son simétricas con respecto a la recta $y = x$. Observa la Figura 1.

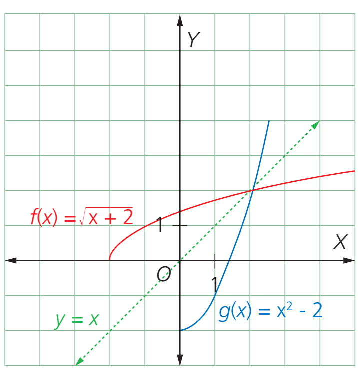


Figura 1

2.2 Cálculo de f^{-1}

Una manera de calcular la función inversa de f se muestra en estos pasos:

1. Se despeja la variable x de la ecuación $y = f(x)$.
2. Se intercambian las variables x y y en la ecuación obtenida.

Ejemplo 2

Para hallar la función recíproca de $f(x) = y = 3x - 1$, se despeja la variable x en la expresión $y = 3x - 1 \Rightarrow x = \dfrac{y+1}{3}$.

Se intercambian x y y: $y = \dfrac{x+1}{3} \Rightarrow f^{-1}(x) = \dfrac{x+1}{3}$

Actividad resuelta

Comunicación

1 Halla y representa la función recíproca de $f(x) = y = -2x + 4$.

Solución:

Primero se debe despejar la variable x en $y = -2x + 4$. Luego, $x = \dfrac{y-4}{-2}$.

Al intercambiar x y y se obtiene $y = \dfrac{x-4}{-2}$. Por lo tanto, $f^{-1}(x) = \dfrac{x-4}{-2}$.

La representación gráfica de las funciones $f(x)$ y $f^{-1}(x)$ se muestra en la Figura 2.

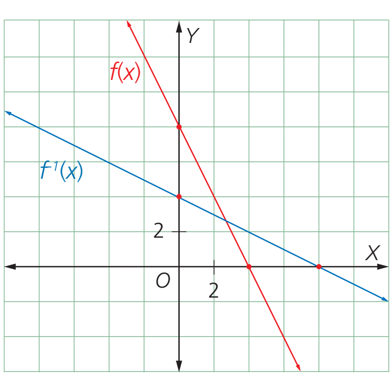


Figura 2

Destreza con criterios de desempeño: Identificar la función inversa y representarla gráficamente.

Desarrolla tus destrezas

Ejercitación

2 Calcula la función inversa de $f(x)$, en cada caso.

a. $f(x) = 3x + 7$ b. $f(x) = \frac{1}{x}$

c. $f(x) = \frac{2}{x} - 3$ d. $f(x) = \frac{x+1}{3}$

Comunicación

3 Considera la función $f(x) = y = 2x + 2$.

a. Halla la función inversa de f.

b. Representa la función f y su inversa. ¿Cómo son respecto de la recta $y = x$?

4 Ten en cuenta la función $f(x) = 3x^2 - 5$.

a. Halla la función f^{-1}.

b. Calcula la composición de estas funciones.

$$f^{-1} \circ f \qquad f \circ f^{-1}$$

c. Las expresiones que obtuviste al realizar las anteriores composiciones, ¿son funciones?

5 Calcula lo que se indica a continuación, si $f(x) = \frac{x-1}{x+3}$ y $g(x) = \sqrt{5-2x}$.

a. $f^{-1}(x)$ b. $g^{-1}(x)$

c. $f^{-1}(3)$ d. $g^{-1}(2)$

6 Calcula las imágenes de $x = 0$, $x = -1$ y $x = 2$ mediante las funciones $(g \circ f)(x)$ y $g^{-1}(x)$, siendo $f(x) = 3x^2 + 4x$ y $g(x) = \sqrt{x-9}$.

Razonamiento

7 Relaciona cada función con su respectiva inversa.

a. $y = 4x + 2$	☐ $f^{-1}(x) = \frac{x+3}{7}$
b. $y = 7x - 3$	☐ $f^{-1}(x) = 2(x+4)$
c. $y = 10x - 5$	☐ $f^{-1}(x) = \frac{x+12}{-3}$
d. $y = -3x - 12$	☐ $f^{-1}(x) = \frac{x-2}{4}$
e. $y = \frac{x}{2} - 4$	☐ $f^{-1}(x) = \frac{x+5}{10}$

8 Analiza y responde.

a. Si $f(x)$ es invertible y creciente, ¿es $f^{-1}(x)$ una función creciente?

b. Si $f(x)$ es invertible y cóncava hacia arriba, ¿es $f^{-1}(x)$ una función cóncava hacia arriba?

c. Si $f(x)$ es invertible y decreciente, ¿es $f^{-1}(x)$ una función creciente?

9 Justifica cuál de las siguientes funciones es la función inversa de sí misma.

a. $y = 2x$ b. $y = -\frac{4}{x+4}$

c. $y = \frac{x}{5}$ d. $y = \frac{2}{x-2}$

e. $y = -5x - 5$ f. $y = \frac{x}{1-x}$

10 Argumenta por qué las parábolas no tienen inversa.

11 Razona acerca de por qué la función $f(x) = |x|$ no tiene función inversa.

12 Dibuja la gráfica de la función inversa de estas funciones.

a.

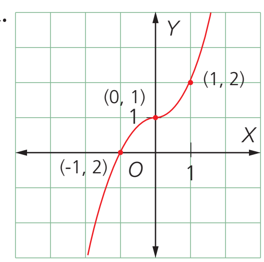


Figura 3

b.

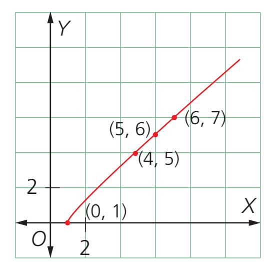


Figura 4

Resolución de problemas

13 Calcula el valor de la función $f(x) = \frac{x^3+2}{x}$ para $x = 1$ y $x = -2$. ¿Esta función tiene inversa? Justifica.

14 Se designa por x la temperatura expresada en grados Fahrenheit y por $f(x)$ la misma temperatura expresada en grados Celsius. Sabiendo que $f(x) = (x - 32) \cdot \frac{5}{9}$ y que $f(40) = \frac{40}{9}$ y que $f(50) = 10$, contesta las siguientes preguntas.

a. ¿Cuál es la temperatura Celsius correspondiente a 35 grados Fahrenheit?

b. ¿A qué temperatura expresada en grados Fahrenheit hierve el agua?

c. ¿A qué temperatura expresada en grados Fahrenheit se congela el agua?

15 Por sus servicios, un investigador privado requiere una cuota de retención de $ 200 más $ 50 por hora. Sea x el número de horas que el investigador pasa trabajando en un caso.

a. Halla la función que modela la cuota del investigador como una función de x.

b. Encuentra $f^{-1}(x)$. ¿Qué representa?

c. Encuentra $f^{-1}(650)$. ¿Qué representa?

3 Funciones polinómicas

Explora

Sea la función:

$$f(x) = 8x + 5x^2 - 3x^3 - 2$$

- ¿Qué clase de función es $f(x)$? ¿Cuáles son sus características?

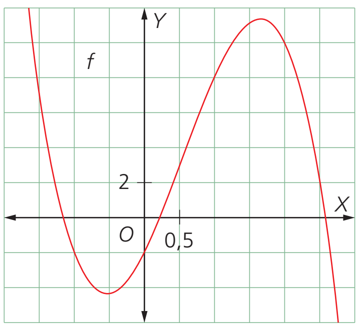


Figura 1

3.1 Funciones polinómicas de tercer grado

La expresión algebraica de la función $f(x)$ es equivalente a:

$$f(x) = -3x^3 + 5x^2 + 8x - 2$$

Esta expresión es un polinomio de grado 3, porque 3 es el mayor exponente de la variable x. A este tipo de funciones se les denomina **funciones polinómicas**.

Se observa que $f(x)$ está definida para cualquier valor real, por lo que $D(f) = \mathbb{R}$. Además todo x tiene una imagen a través de f en el conjunto de los números reales, esto significa, que es una función continua tal que $R(f) = \mathbb{R}$, como se muestra en la Figura 1.

Una **función polinómica de tercer grado**, llamada también **cúbica**, es de la forma:

$$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d \text{ con } a, b, c, d \text{ reales y } a \neq 0$$

- El dominio de la función es el conjunto de los números reales.
- La función es continua en todo su dominio.

Ejemplo 1

En la Figura 2, se puede verificar que la función polinómica $f(x) = -x^3 - 4$ es continua. Su dominio y su rango coinciden con el conjunto $\mathbb{R}$.

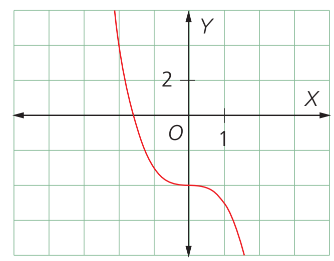


Figura 2

3.2 Funciones polinómicas de cuarto grado

Una **función polinómica de cuarto grado**, llamada también **cuártica**, es de la forma:

$$f(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e, \text{ con } a, b, c, d, e \text{ reales y } a \neq 0$$

- El dominio de la función es el conjunto de los números reales.
- La función es continua en todo su dominio.

Actividad resuelta

Comunicación

1 Representa la función $f(x) = x^4 - x^2$.

Solución:

En este caso, se resuelve la ecuación $f(x) = 0$, con el fin de determinar los puntos de corte de la gráfica de la función con el eje X. Esto es:

$$x^4 - x^2 = x^2(x^2 - 1) = 0 \Rightarrow x = 0, x = 1 \text{ y } x = -1$$

También resulta útil calcular algunos pares adicionales de valores de la función, con lo cual se completa una tabla como la siguiente.

x	-1	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1
f(x)	0	$-\frac{3}{16}$	$-\frac{15}{256}$	0	$\frac{3}{16}$	$\frac{15}{256}$	0

Tabla 1

Al representar estos puntos se obtiene la gráfica de la Figura 3.

Es importante recordar que, a mayor cantidad de valores que se evalúen en la tabla, mayor precisión en el trazo de la gráfica.

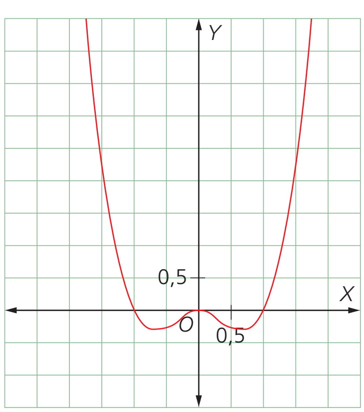


Figura 3

Destreza con criterios de desempeño: Definir y reconocer una función polinómica de manera algebraica y gráfica.

Desarrolla tus destrezas

Ejercitación

2 Completa una tabla de valores para representar cada función cúbica.

a. $f(x) = 2x^3$ b. $f(x) = 2 - x^3$

c. $f(x) = x^3 - 3$ d. $f(x) = -3x^3 + 2$

3 Representa las siguientes funciones cuárticas.

a. $f(x) = x^4$ b. $f(x) = 2x^4$

c. $f(x) = x^4 + 1$ d. $f(x) = 2x^4 - 3$

4 Haz un bosquejo de la gráfica de cada función polinómica, presentada de forma factorizada.

a. $j(x) = (x - 1)(x + 2)$

b. $m(x) = (x - 1)^2(x - 3)$

c. $t(x) = \frac{1}{5}x(x - 5)^2$

d. $p(x) = (x - 3)(x + 2)(3x - 2)$

e. $r(x) = (2x - 1)(x + 1)(x + 3)$

Razonamiento

5 Ten en cuenta las siguientes funciones polinómicas.

$$f(x) = -x^3 + x \text{ y } g(x) = x^4 + x^2$$

a. Construye una tabla de valores y realiza las gráficas correspondientes.

b. Describe el dominio.

c. Determina el recorrido.

d. Encuentra los cortes de la gráfica con los ejes.

e. Estudia la simetría.

f. Estudia la continuidad.

g. Analiza los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la gráfica.

h. Encuentra los máximos y los mínimos.

6 Elabora las gráficas de estas funciones en un mismo plano cartesiano. Luego, responde las preguntas.

$$y = x^2, y = x^3, y = x^4 \text{ y } y = x^5 \text{ para } -1 \leq x \leq 1$$

a. ¿A qué se asemejaría la gráfica de $y = x^{100}$ en este mismo intervalo?

b. ¿Qué se podría decir acerca de $y = x^{101}$?

7 Justifica si las proposiciones son falsas o verdaderas.

a. El dominio de toda función polinómica está conformado por los números reales positivos.

b. El rango de las funciones polinómicas es $\mathbb{R}$.

Razonamiento

8 Relaciona cada función polinómica con su gráfica correspondiente.

a. $P(x) = x(x^2 - 4)$

b. $Q(x) = -x^2(x^2 - 4)$

c. $R(x) = x^4 + 2x^3$

d. $T(x) = -x^3 + 2x^2$

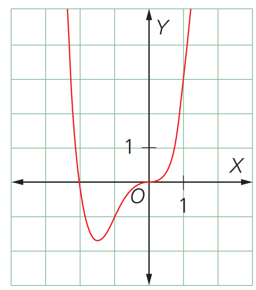


Figura 4

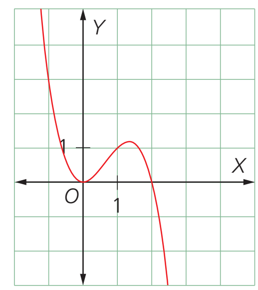


Figura 5

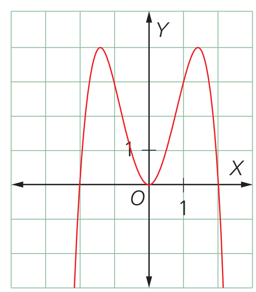


Figura 6

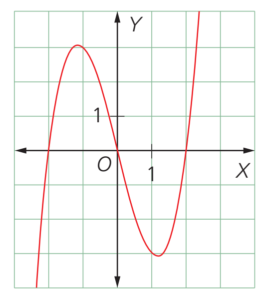


Figura 7

Resolución de problemas

9 Se construye una caja abierta de una pieza de cartón de 20 cm por 40 cm cortando cuadrados de longitud lateral x de cada esquina y doblando hacia arriba los lados, como se observa en la Figura 8.

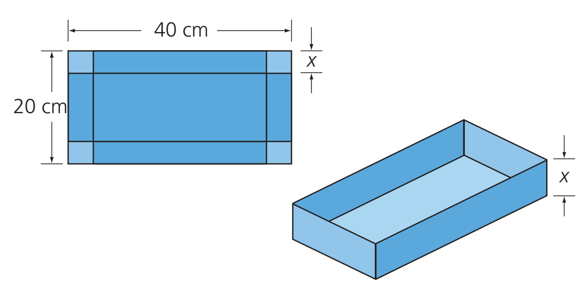


Figura 8

a. Expresa el volumen V de la caja como una función en términos de la longitud x.

b. ¿Cuál es el dominio de V?

c. Realiza una gráfica de la función V y empléala para estimar el volumen máximo de la caja.

4 Funciones exponenciales

Explora

La vida media del elemento radiactivo estroncio 90 es de 28,8 años. La función que modela el número N de núcleos por desintegrar durante un tiempo t en años, es

$$N(t) = N_0 \cdot 2^{-\frac{t}{T}}$$

donde N_0 es el número de núcleos que hay inicialmente y T la vida media del reactivo en años.

- Si en el año 2 000 se tenían 20 núcleos de estroncio 90, ¿cuántos núcleos por desintegrar quedarán en el año 2053? Elabora una gráfica de la función dada.

Ten en cuenta

Las funciones exponenciales sirven para describir fenómenos de crecimiento y decrecimiento, tales como los crecimientos de la masa arbórea de un bosque o de una colonia de células, o la desintegración radiactiva, entre otros.

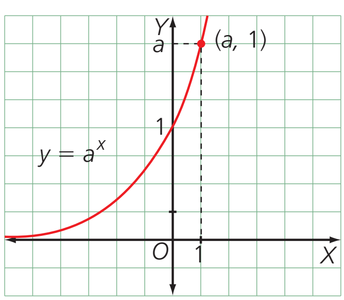


Figura 2

Para determinar la cantidad de núcleos por desintegrar en el año 2053, se sustituye $N_0 = 20$, $t = 53$ y $T = 28{,}8$ en la función $N(t)$, así:

$$N = 20 \cdot 2^{-\frac{53}{28{,}8}} = 5{,}59$$

Lo anterior indica que, en el año 2053 quedarán 5,59 núcleos de estroncio 90 por desintegrar. La gráfica de la función N se observa en la Figura 1.

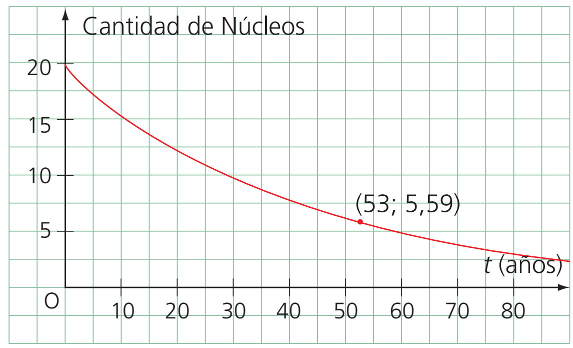


Figura 1

Las funciones de la forma $y = a^x$, donde a es un número real positivo distinto de 1, se denominan **funciones exponenciales**.

El dominio de una función exponencial es el conjunto $\mathbb{R}$, y su recorrido, $\mathbb{R}^+$. Estas funciones son continuas en todo su dominio.

4.1 Propiedades de las funciones exponenciales

Las funciones exponenciales cumplen las siguientes propiedades.

- Sus gráficas pasan por los puntos (0, 1) y (1, a), ya que $a^0 = 1$ y $a^1 = a$.
- Si $a > 1$, la función $y = a^x$ es creciente en todo el dominio (Figura 2).
- Si $0 < a < 1$, la función $y = a^x$ es decreciente en todo el dominio (Figura 3).
- Para estas funciones, la recta $y = 0$ es una asíntota horizontal cuando $x \to -\infty$ si $a > 1$, y cuando $x \to +\infty$ si $0 < a < 1$.

Ejemplo 1

Las gráficas de las funciones $f(x) = 2^x$ y $g(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ se muestran en la figuras 4 y 5, respectivamente. Las características de las funciones son:

- Ambas funciones pasan por (0, 1).
- La función f es creciente y la función g es decreciente.
- Tanto f como g tienen al eje X como asíntota horizontal.

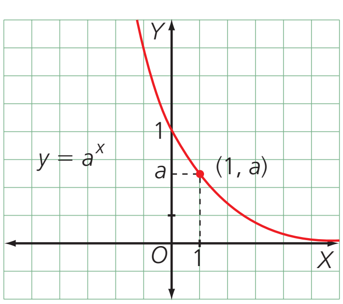


Figura 3

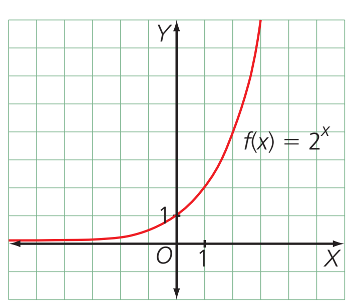


Figura 4

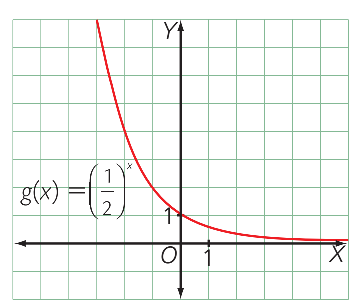


Figura 5

Destreza con criterios de desempeño: Definir y reconocer una función exponencial de manera algebraica y gráfica .

4.2 Función exponencial natural

La función de la forma $\boldsymbol{y = e^x}$ es una función exponencial cuya base es el llamado número de Euler ($e = 2{,}718281828...$), se denomina **función exponencial natural.**

Para dibujar la gráfica de la función $y = e^x$, se completó la Tabla 1 y se representaron algunos puntos. Observa la Figura 6.

x	$f(x) = e^x$
-3	$e^{-3} = 0{,}05$
-2	$e^{-2} = 0{,}135$
-1	$e^{-1} = 0{,}368$
0	$e^0 = 1$
1	$e^1 = 2{,}718$
2	$e^2 = 7{,}389$
3	$e^3 = 20{,}086$

Tabla 1

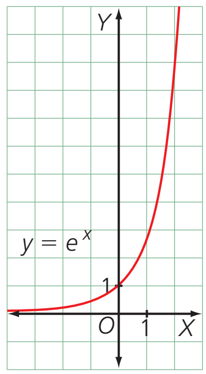


Figura 6

Ten en cuenta

La función $y = e^x$ es una exponencial importante porque aparece en la descripción de múltiples procesos naturales, como el crecimiento de poblaciones de microorganismos. Esta función también permite describir, procesos como las desintegraciones radiactivas.

Ejemplo 2

A continuación se estudia cómo la gráfica de la función $f(x) = -e^{-(x-3)} - 2$ es una transformación de la función exponencial natural $y = e^x$.

Función	Transformación
$y = e^{-x}$	El signo menos en el exponente significa que la gráfica de $y = e^x$ se refleja con respecto al eje Y.
$y = e^{-(x-3)}$	El número -3 indica que la gráfica de $y = e^{-x}$ se traslada 3 unidades a la derecha.
$y = -e^{-(x-3)}$	El signo $-$ antes de e, significa que la gráfica de $y = e^{-(x-3)}$ se refleja con respecto al eje X.
$y = -e^{-(x-3)}-2$	El número -2 indica que la gráfica de $y = -e^{-(x-3)}$ se traslada 2 unidades hacia abajo.

En la Figura 7 se observa la secuencia de las gráficas obtenidas con cada transformación hasta llegar a la de $f(x) = -e^{-(x-3)} - 2$.

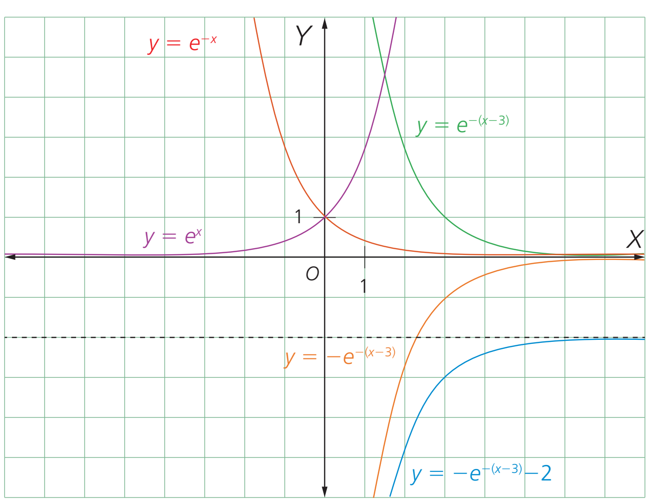


Figura 7

Razonamiento matemático

Relación entre e^x y $-e^{-x}$

La gráfica de la función $m(x) = -e^{-x}$, es un reflejo de la función $y = e^x$ con respecto al eje Y y luego con respecto al eje X.

- ¿En qué cuadrante del plano cartesiano está graficada la función $m(x)$?

4 Funciones exponenciales

Ten en cuenta

El dominio de funciones que modelan situaciones relacionadas con tiempo, personas y magnitudes positivas en general, siempre debe partir desde cero.

4.3 Crecimiento y decrecimiento exponencial

Para analizar algunos fenómenos estudiados en diferentes áreas del conocimiento que siguen un comportamiento exponencial, se utiliza con frecuencia la fórmula conocida como fórmula de crecimiento exponencial, dada por:

$$f(t) = X_0 e^{tk}$$

En esta expresión, X_0 es el valor inicial de la variable estudiada, t es el lapso de variación continua y k es la tasa de variación.

Ejemplo 3

La fórmula de crecimiento poblacional para una región donde había 250 000 habitantes en 2014 y un crecimiento anual de 1,5% está dada por

$$f(t) = 250\,000 \cdot e^{0{,}015t}$$

Si se desea saber cuántos habitantes habrá en el año 2025, se reemplaza en la función f, el tiempo t por 11 años, así:

$$f(11) = 250\,000 \cdot e^{0{,}015 \cdot 11} = 294\,848$$

El anterior resultado indica que, en el año 2025 la región tendrá 294 848 habitantes. En este caso, el dominio de la función es el conjunto $\mathbb{R}^+$, porque los años son magnitudes positivas, y el rango $[250\,000, \infty)$.

Actividad resuelta

Resolución de problemas

1 Para determinar la cantidad M de miligramos de un medicamento que hay en el torrente sanguíneo después de t horas de ser suministrado a un paciente, se puede emplear la función $M(t) = 3e^{-0{,}4t}$.

a. Después de una hora, ¿cuántos miligramos estarán presentes en el torrente sanguíneo del paciente? ¿Y después de 5 horas?

b. Elabora la gráfica de la función $M(t)$.

Solución:

a. En esta situación, basta con calcular el valor de la función $M(t)$ para $t = 1$. Esto es: $M(t) = 3e^{-0{,}4t} \Rightarrow M(1) = 3e^{-0{,}4 \cdot 1} \Rightarrow M(1) = 2{,}01$.

El resultado anterior significa que al cabo de una hora de suministrado, hay 2,01 mg de medicamento en el torrente sanguíneo del paciente.

De manera análoga, para $t = 5$, se tiene: $M(5) = 3e^{-0{,}4 \cdot 5} \Rightarrow M(5) = 0{,}41$.

Por lo tanto, al cabo de 5 horas, habrá 0,41 mg de medicamento en el torrente sanguíneo del paciente.

b. En la Tabla 2, se registraron algunos valores de la función y se obtuvo la gráfica de la Figura 8.

t	$M(t)$
1	2,01
2	1,35
4	0,61
5	0,41

Tabla 2

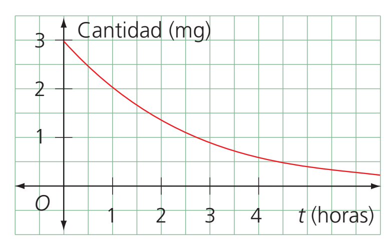


Figura 8

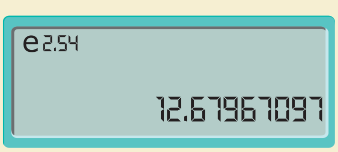
En la calculadora

Para calcular potencias del número e, se utilizan las teclas: SHIFT ln

Por ejemplo, para resolver la potencia $e^{2{,}54}$ se digita:

SHIFT ln 2 • 5 4 EXE

y se obtiene:



- Calcula las potencias $e^{0{,}015}$ y $e^{-0{,}13}$.

Destreza con criterios de desempeño: Definir y reconocer una función exponencial de manera algebraica y gráfica .

Desarrolla tus destrezas

Comuncicación

2 Calcula las siguientes potencias.

a. $5^{2,23}$ b. $3^{-4,23}$ c. $\left(\frac{1}{4}\right)^{2,73}$ d. $\left(\frac{1}{2}\right)^{-2,05}$

3 Completa una tabla de valores y representa las funciones de cada par en el mismo plano cartesiano.

a. $y = 3^x$ $y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$

b. $y = 6^x$ $y = 6^{-x}$

c. $y = 4^x$ $y = \left(\frac{1}{4}\right)^x$

Razonamiento

4 Determina, sin dibujarla, si cada función es creciente o decreciente.

a. $y = \left(\frac{1}{6}\right)^x$ b. $y = 7^x$

c. $y = 5^{-x}$ d. $y = \left(\frac{5}{2}\right)^x$

Modelación

5 Representa las siguientes funciones exponenciales.

a. $y = 2^x$ b. $y = 3^{-x}$

c. $y = 5^x$ d. $y = 7^x$

e. $y = \left(\frac{1}{6}\right)^x$ f. $y = 3^x$

g. $y = 2e^{-x}$ h. $y = -e^x$

i. $y = -2e^{-x}$ j. $y = -e^{-x}$

Comunicación

6 Responde estas preguntas.

a. ¿En qué puntos corta a los ejes de coordenadas la gráfica de $y = 8^x$.

b. ¿Es creciente o decreciente?

c. ¿Presenta algún tipo de asíntota?

7 Realiza paso a paso la gráfica de cada función. Describe su dominio, su rango y su asíntota horizontal.

a. $y = 2^x + 1$ b. $y = 3^x - 2$

c. $y = 3^{x-1}$ d. $y = 2^{x+2}$

e. $y = e^{-x}$ f. $y = -e^x$

g. $y = e^x - 1$ h. $y = 2 - e^{3x}$

i. $y = 2e^{-x}$ j. $y = -2e^{-x}$

Resolución de problemas

8 Supón que te ofrecen un empleo que dura un mes y te pagan muy bien.



¿Cuál de los siguientes métodos de pago consideras que es más rentable?

a. Un millón de dólares al final de mes.

b. Dos centavos el primer día del mes, 4 centavos el segundo día, 8 centavos el tercer día y, en general, 2^n centavos en el n-ésimo día del mes.

9 Sara se encuentra realizando un trabajo de investigación sobre cómo varía la presión atmosférica en relación con la altura sobre el nivel del mar. Como parte de su trabajo registró algunos datos en la Tabla 3.

Altura (m)	Presión (mbar)
100	980
1 100	882
2 100	790
3 100	718

Tabla 3



Ella propuso el siguiente modelo para determinar la presión, p, a una determinada altura, h.

$$p_0 \cdot k^{\frac{h}{1000}}$$

a. Utiliza los dos primeros datos de la tabla para determinar los valores aproximados de p_0 y k según la propuesta de Sara.

b. Sara solo considerará válido el modelo si los otros dos datos se desvían menos del 1% del valor predicho para ellos según su propuesta. ¿Debe considerarlo válido?

c. Calcula la presión, según el modelo de Rocío, a una altura de 4 100 m.

5 Función exponencial

Explora

En la Tabla 1 se registró la variación anual de un cultivo de bacterias durante un experimento.

Año	Bacterias
1	100
2	10 000
3	1 000 000
4	100 000 000

Tabla 1



- ¿Qué función exponencial modela el crecimiento de las bacterias en un tiempo x años?

Al analizar los datos se encuentra la siguiente secuencia:

$$10^{2\cdot 1} = 10^2 = 100$$
$$10^{2\cdot 2} = 10^4 = 10\,000$$
$$10^{2\cdot 3} = 10^6 = 1\,000\,000$$
$$10^{2\cdot 4} = 10^8 = 100\,000\,000$$

Por lo tanto, se deduce que la función exponencial que modela el crecimiento de las bacterias en x años se puede expresar como $y = 10^{2x}$.

La **función $y = 10^x$** es una exponencial que describe multitud de procesos naturales. Su dominio es $\mathbb{R}$, y su recorrido, $\mathbb{R}^+$. Es continua y creciente en todo su dominio.

Ejemplo 1

En la Figura 1 se representaron los datos acerca de la variación del cultivo de bacterias. En esta se encuentra que la función $y = 10^{2x}$ es creciente en todo su dominio y que su asíntota horizontal es el eje X.

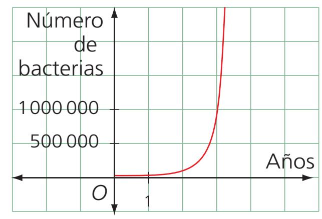


Figura 1

Actividad resuelta

Modelación

1 Representa las funciones exponenciales $y = 10^x$ y $y = 10^{-x}$ en el mismo plano cartesiano.

Solución:

Con ayuda de la calculadora, se completa la Tabla 2.

x	-2	-1	0	1	2	3
$y = 10^x$	$10^{-2} = \frac{1}{10^2} = \frac{1}{100}$	$10^{-1} = \frac{1}{10}$	1	$10^1 = 10$	$10^2 = 100$	$10^3 = 1\,000$
$y = 10^{-x}$	$10^{-(-2)} = 10^2 = 100$	$10^{-(-1)} = 10^1 = 10$	1	$10^{-1} = \frac{1}{10}$	$10^{-2} = \frac{1}{100}$	$10^{-3} = \frac{1}{1\,000}$

Tabla 2

Al representar los datos registrados en la tabla, se obtienen las gráficas que se observan en la Figura 2.

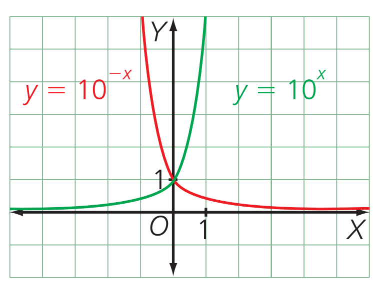


Figura 2

En la figura se encuentra que la función $y = 10^x$ es creciente en todo su dominio, mientras que $y = 10^{-x}$ es decreciente. Además, la asíntota horizontal para las dos gráficas es el eje X.

Ten en cuenta

Por las propiedades de los exponentes, se cumple la siguiente igualdad:

$$10^{-x} = \frac{1}{10^x}$$

TECNOLOGÍAS de la información y la comunicación

http://www.vitutor.com/fun/2/c_13.html

Refuerza tus conocimientos sobre funciones exponenciales.

Destreza con criterios de desempeño: Definir y reconocer una función exponencial $y=x^{10}$ de manera algebraica y gráfica .

Desarrolla tus destrezas

Ejercitación

2 Calcula las siguientes potencias:

a. $10^{-\frac{1}{2}}$ b. $10^{1,15}$

c. $10^{-4,23}$ d. $10^{-2,47}$

3 Construye la gráfica de cada función e indica el dominio, el rango y las asíntotas.

a. $y = 10^{-3x}$ b. $y = 10^{2x}$

c. $y = \dfrac{1}{10^{-x}}$ d. $y = \dfrac{3}{10^{x}}$

e. $y = 10^{x+2}$ f. $y = 10^{x-4}$

Modelación

4 Representa en los mismos ejes las siguientes funciones exponenciales.

a. $y = -10^{x}$ y $y = 10^{-x}$

b. $y = 10^{x}$ y $y = 10^{x+1}$

5 A partir de la gráfica de la función $y = 10^{x}$, traza las gráficas de las siguientes funciones.

a. $y = 10^{x} + 1$ b. $y = 2(10^{x})$

c. $y = 10^{-x}$ d. $y = -10^{x}$

6 Grafica los datos de la Tabla 3 en un plano cartesiano con una escala adecuada para representar los valores de y. Luego, resuelve.

x	$u(x)$
1	1 000
2	1 000 000
3	1 000 000 000
4	1 000 000 000 000
5	1 000 000 000 000 000

a. ¿Cuál es la expresión algebraica de la función $u(x)$?

b. ¿Por qué la función es creciente?

c. ¿La gráfica de $u(x)$ tiene asíntotas?

Razonamiento

7 Escribe F, si la proposición es falsa o V, si es verdadera.

a. La función $y = 10^{x}$ es una función exponencial especial porque puede modelar cualquier situación real.

b. La única asíntota de la gráfica de la función $y = 10^{x}$ es el eje Y.

c. La gráfica de la función $y = 10^{x+7}$ es la gráfica de la función $y = 10^{x}$ desplazada 7 unidades a la izquierda.

8 Relaciona cada función con su respectiva gráfica.

a. $y = 10^{-2x}$ b. $y = 10^{x-6}$

c. $y = 10^{x+2}$ d. $y = 10^{-(x-1)}$

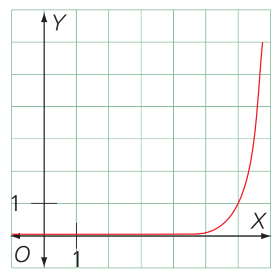


Figura 3

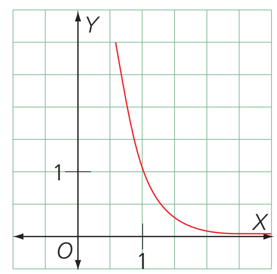


Figura 4

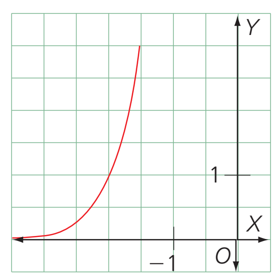


Figura 5

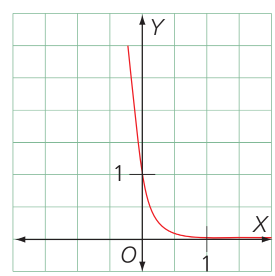


Figura 6

Resolución de problemas

9 La energía liberada en un terremoto medida en kilovatios-hora, sigue aproximadamente la función:

$$E(x) = 0,02 \cdot 10^{1,5x}$$

En esta expresión, x es la magnitud del terremoto en la escala de Richter.

a. Si un terremoto tuvo una magnitud de 8, ¿cuál fue la energía liberada?

b. Realiza la gráfica de la función E.

c. ¿Cuál es el dominio y rango de la función E?

d. Investiga cómo se define la energía liberada en un terremoto.

6 Ecuaciones exponenciales

Explora

Andrés recibe un correo electrónico que reenvía a cuatro amigos. Al día siguiente, cada uno de ellos lo reenvía a otros cuatro y así sucesivamente.


SM Ediciones

- Determina cuántos días transcurrieron desde que Andrés reenvió el correo, si lo recibieron en total 1 024 personas.

De acuerdo con el enunciado del problema, después de x días, el número de personas que tienen el correo es 4^x. Por lo tanto, se puede plantear la siguiente ecuación.

$$4^x = 1024 \Rightarrow 4^x = 4^5 \Rightarrow x = 5$$

El resultado anterior significa que transcurrieron 5 días desde que Andrés reenvió el correo.

Las ecuaciones en las que la incógnita aparece en el exponente se denominan **ecuaciones exponenciales.**

Ejemplo 1

- La solución de la ecuación $2^{x^2+6} = 32^x$ se muestra paso a paso a continuación:

$2^{x^2+6} = 2^{5x}$	Se escribe 32 en términos de sus factores primos.
$x^2 + 6 = 5x$	Se igualan los exponentes porque las bases son iguales.
$x^2 - 5x + 6 = 0$	Se iguala la ecuación a 0.
$(x-3)(x-2) = 0$	Se factoriza.
$x = 3$ y $x = 2$	Se resuelve cada ecuación.

Por lo tanto, las soluciones de la ecuación son $x = 3$ y $x = 2$.

- Observa cómo se resuelve la ecuación $4^x - 2^{x+1} = 8$.

$4^x - 2^{x+1} = 8$	
$(2^x)^2 - 2 \cdot 2^x = 8$	Se escriben las potencias como potencias de base 2.
$u^2 - 2u - 8 = 0$	Se hace cambio de la variable con $2^x = u$.
$u = 4$ y $u = -2$	Se resuelve la ecuación cuadrática resultante, en términos de u.
$2^x = 4$ y $2^x = -2$	Se deshace el cambio de variable.
$x = 2$ y $= -2$	Se obtiene la única solución posible.

Razonamiento matemático

Ecuación exponencial

Considera la ecuación $2^{(9^a)} = 8^{(3^b)}$.

- ¿Qué relación se puede establecer entre las incógnitas a y b?

Actividad resuelta

Comunicación

1 Resuelve la ecuación $3^{x-1} + 3^x + 3^{x+1} = 104$.

Solución:

Se busca que en todos los exponentes aparezca solo la incógnita x.

$$3^{x-1} + 3^x + 3^{x+1} = 104 \Rightarrow \frac{3^x}{3} + 3^x + 3 \cdot 3^x = 104$$

Se realiza el cambio de variable $3^x = u$.

$$\frac{u}{3} + u + 3 \cdot u = 104 \Rightarrow \left(\frac{1}{3} + 1 + 3\right)u = 104$$

$$\Rightarrow \frac{13}{3}u = 104 \Rightarrow u = \frac{104 \cdot 3}{13} = 24$$

Después se deshace el cambio de variable reduciendo la ecuación inicial a una que tiene solución directa.

$$u = 24 \Rightarrow 3^x = 24$$

Como 24 no es potencia de 3, se toman logaritmos decimales en ambos miembros de la igualdad.

$$\log 3^x = \log 24 \Rightarrow x \log 3 = \log 24 \Rightarrow x = \frac{\log 24}{\log 3} = 2{,}89$$

Ten en cuenta

Cualquier ecuación exponencial, después de aplicar las propiedades de las potencias o un cambio de variable, se transforma en una ecuación del tipo $a^x = b$. Para resolverla hay dos opciones.

- Si b es una potencia de a, la resolución es inmediata.
- Si b no es una potencia de a, se toman logaritmos decimales.

Destreza con criterios de desempeño: Resolver ecuaciones exponenciales aplicando diferentes procesos algebraicos.

Desarrolla tus destrezas

Ejercitación

3 Relaciona cada ecuación con su respectiva solución.

a. $e^{2x+1} = 200$	( ) 6,213
b. $\left(\frac{1}{4}\right)^x = 75$	( ) 0,62
c. $5^x = 4^{x+1}$	( ) 9,27
d. $10^{1-x} = 6^x$	( ) 2,15
e. $2^{3x+1} = 3^{x-2}$	( ) − 2,95
f. $7^{\frac{x}{2}} = 5^{1-x}$	( ) 0,56
g. $\frac{50}{1+e^{-x}} = 4$	( ) − 2,44
h. $\frac{10}{1+e^{-x}} = 2$	( ) − 3,11

4 Selecciona los valores que satisfacen cada ecuación.

a. $x^2 2^x - 2^x = 0$

1	-1	2

b. $x^2 10^x - x10^x = 2(10^x)$

1	-1	2

c. $4x^3 e^{-3x} - 3x^4 e^{-3x} = 0$

-1	$\frac{4}{3}$	0

d. $x^2 e^x - x\,e^x - e^x = 0$

$\frac{1+\sqrt{5}}{2}$	$\frac{1-\sqrt{5}}{2}$	$\frac{1+\sqrt{3}}{2}$

e. $e^{2x} - 3e^x + 2 = 0$

$\ln 2$	0	$\ln 1$

f. $e^{2x} - e^x - 6 = 0$

1	-2	$\ln 3$

g. $e^{4x} + 4e^{2x} - 21 = 0$

$\frac{\ln 3}{2}$	$-\frac{\ln 3}{2}$	1

5 Resuelve estas ecuaciones exponenciales.

a. $2^x + 2^{x+1} = 384$

b. $5^x + 5^{x+1} + 5^{x+2} = 775$

c. $9^x - 10 \cdot 3^{x+1} + 81 = 0$

d. $4^x - 9 \cdot 2^x = -20$

e. $4^x + 2^{x+1} = 8$

Razonamiento

6 Analiza y responde.

Sin resolver la ecuación, encuentra dos números enteros entre los que debe quedar la solución de $9^x = 20$. Haz lo mismo para $9^x = 100$. Explica cómo llegaste a tus conclusiones.

7 Encuentra la solución de estas ecuaciones.

a. $4 \cdot 5^x = 500$

b. $5 \cdot 5^{2x} = 2\,500$

c. $6^{2x+2} = 46\,656$

d. $7 \cdot 3^{x-1} = 567$

Resolución de problemas

8 Observa las gráficas de las funciones $s(x) = 3^{x+2}$ y $w(x) = e^{-x-3}$ en la Figura 1 y responde.

a. ¿En qué coordenada aproximada ocurre que $s(x) = w(x)$?

b. Soluciona la ecuación $3^{x+2} = e^{-x-3}$ para saber con exactitud el punto de corte entre las funciones s y w.

c. ¿Qué función es decreciente?

d. ¿Qué función es creciente?

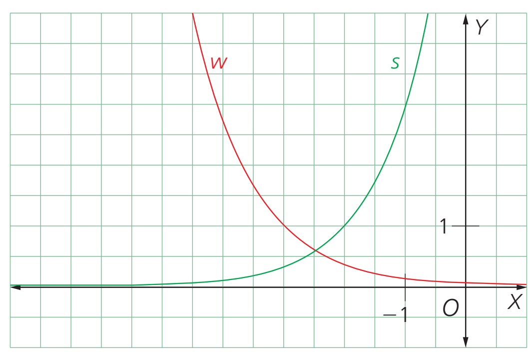


Figura 1

9 Un lago pequeño contiene cierta especie de pez. La población de peces se modela mediante la función:

$$P = \frac{10}{1 + 4e^{-0{,}8t}},$$

En esta expresión, P es el número de peces en miles y t se mide en años desde que se provisionó el lago.

a. Encuentra la población de peces después de tres años.

b. ¿Después de cuántos años la población de peces llega a 5 000?

c. Realiza la gráfica de la función P.

d. ¿Después de cuántos años la población de peces llega a un total de 21 345?

7 Funciones logarítmicas

Explora

Para cierta población de células, el crecimiento N en un tiempo t está dado por la expresión:

$$N = 4\log_3(1 + t)$$



- Construye la gráfica de la función N y determina qué significado tiene al ser creciente o decreciente.

La gráfica de la función $N = 4\log_3(1 + t)$ se observa en la Figura 1. El dominio de la función se acota en el intervalo $[0, \infty)$ porque el tiempo es siempre una magnitud positiva. La función es creciente, lo cual significa que la cantidad de células aumenta a medida que pasa el tiempo.

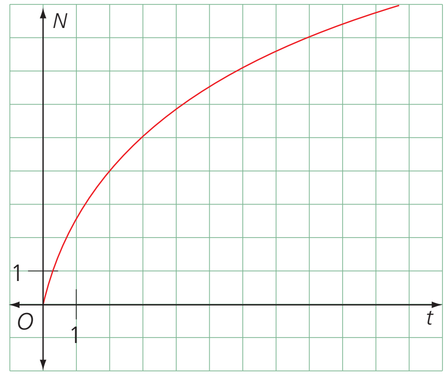


Figura 1

La función $f(x) = \log_a x$ denominada **función logarítmica** asocia a cada número real positivo x el valor de su logaritmo en base a, $\log_a x$.

Las funciones logarítmicas tienen también numerosas aplicaciones; por ejemplo, la escala pH, que mide la acidez de sustancias como champús o jabones.

7.1 Propiedades de las funciones logarítmicas

- Su dominio se encuentra formado por los números reales positivos, y su recorrido, por todos los números reales.
- Son continuas en todo su dominio.
- Si $a > 1$, la función es negativa para valores de x menores que 1 y positiva para valores de x mayores que 1, siendo creciente en todo su dominio.
- Si $a < 1$, la función es positiva para $x < 1$ y negativa para $x > 1$, siendo decreciente en todo su dominio.
- Tienen como asíntota vertical la recta $x = 0$.
- Siempre pasan por los puntos $(1, 0)$ y $(a, 1)$.

Ejemplo 1

La función $y = \log x$, cuya base es 10, es una función de la forma $y = \log_a x$ para $a > 1$ y $y = \log_{0,1} x$ lo es para $a < 1$. En la Figura 2 se presentan sus gráficas.

	$y = \log x$	$y = \log_{0,1} x$
−1	No definido	No definido
0	No definido	No definido
0,01	$\log 0{,}01 = -2$	$\log_{0,1} 0{,}01 = 2$
0,1	$\log 0{,}1 = -1$	$\log_{0,1} 0{,}1 = 1$
1	$\log 1 = 0$	0
2	$\log 2 = 0{,}30$	$\log_{0,1} 2 = 20{,}30$
10	$\log 10 = 1$	$\log_{0,1} 10 = -1$
100	$\log 100 = 2$	−2

Tabla 1

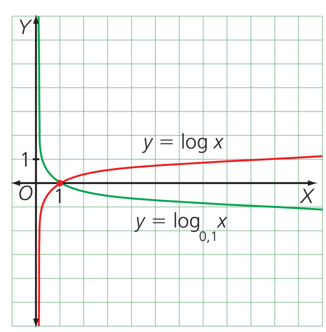


Figura 2

Se observa que $y = \log x$ es creciente en todo su dominio, mientras que $y = \log_{0,1} x$ es decreciente en todo su dominio.

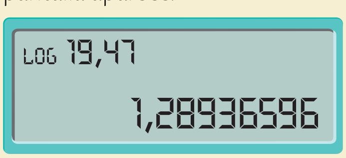
En la calculadora

Logaritmo decimal

Para hallar log 19,47 teclea

log 1 9 • 4 7 EXE

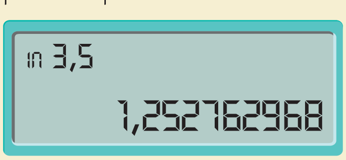
En pantalla aparece:



Para calcular ln 3,5, digita:

ln 3 • 3 EXE

En pantalla aparece:



Destreza con criterios de desempeño: Definir y reconocer una función logarítmica de manera algebraica y gráfica .

7.2 Logaritmo natural

Del mismo modo que ocurre con las funciones exponenciales, el número e adquiere también una especial importancia en las funciones logarítmicas.

El logaritmo que tiene por base el número $\boldsymbol{e}$ se denomina **logaritmo neperiano** o **natural**, y se representa como **ln $\boldsymbol{x}$**.

$$\ln x = \log_e x = y \Leftrightarrow e^y = x$$

La función $\boldsymbol{f(x)} = \textbf{ln}\ \boldsymbol{x}$ asocia a cada número real positivo x el valor de su logaritmo neperiano ln x.

Ejemplo 2

En la Tabla 2 se registraron algunos valores de la función $y = \ln x$.

x	$y = \ln x$	x	$y = \ln x$
−1	No definido	2	ln 2 = 0,69
0	No definido	2,718... = e	ln e = 1
0,1	ln 0,1 = −2,30	10	2,30
1	0	100	4,61

Tabla 2

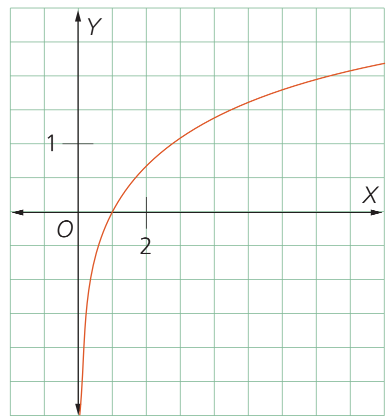


Figura 3

Al representar estos valores en el plano cartesiano, se obtiene la gráfica de la Figura 3. Allí se observa que la función es creciente en todo su dominio.

Ejemplo 3

En la Tabla 3 se describen las transformaciones aplicadas a la función $y = \ln x$ para obtener la de la función $y = -\ln(x + 2) - 3$.

Función	Transformación
$y = \ln(x + 2)$	El número 2 indica que la gráfica de $y = \ln x$ se traslada 2 unidades a la izquierda.
$y = -\ln(x + 2)$	El signo − antes de ln, significa que la gráfica de $y = \ln(x + 2)$ se refleja con respecto al eje X.
$y = -\ln(x + 2) - 3$	El número −3 indica que la gráfica de $y = -\ln(x + 2)$ se traslada 3 unidades hacia abajo.

Tabla 3

Observa la secuencia de las transformaciones en la Figura 4.

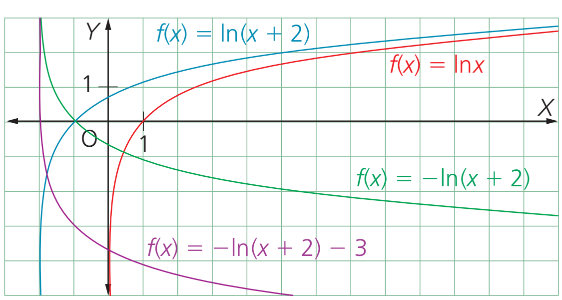


Figura 4

Ten en cuenta

Las funciones $y = \log x$ y $y = \ln x$ son ejemplos de la función logarítmica, de la forma $y = \log x$ ($a > 0$, distinto de 1).

TECNOLOGÍAS de la información y la comunicación

TIC

http://www.vitutor.com/fun/2/c_14.html

Refuerza tus conocimientos de la función logarítmica.

7 Funciones logarítmicas

7.3 Relación entre las funciones exponenciales y logarítmicas

Las funciones $f(x) = e^x$ y $g(x) = \ln x$ son **recíprocas** o **inversas** y sus gráficas son simétricas con respecto a la recta $y = x$.

Ejemplo 4

La gráficas de las figuras 5 a 7, muestran la relación que existe entre las funciones $y = e^x$ y $y = \ln x$.

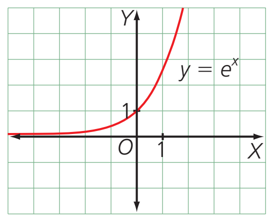


Figura 5

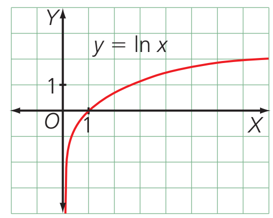


Figura 6

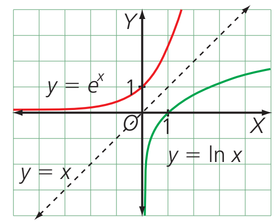


Figura 7

Las funciones $y = 10^x$ y $y = \log x$ son **recíprocas o inversas** y, en consecuencia, sus gráficas son simétricas con respecto a la recta $y = x$.

Ejemplo 5

En las figuras 8 a 10 se observa la relación que existe entre las funciones $y = 10^x$ y $y = \log x$.

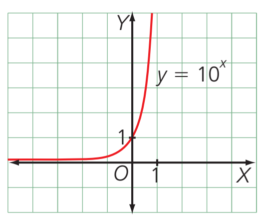


Figura 8

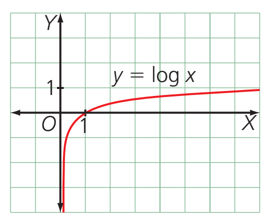


Figura 9

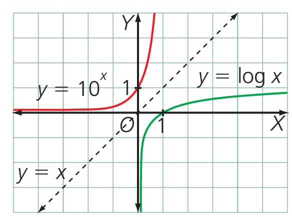


Figura 10

La función exponencial $y = a^x$ ($a > 0$, $a \neq 1$) es la recíproca de la función logarítmica de la misma base, $y = \log_a x$, por lo que sus gráficas respectivas son simétricas con respecto a la recta $y = x$.

Actividad resuelta

Modelación

1 Representa la función $y = 2^x$ y, a partir de su gráfica, dibuja también la de la función $y = \log_2 x$.

Solución:

En temas anteriores se aprendió cómo construir la gráfica de la función $y = 2^x$. Como $y = \log_2 x$ es la función recíproca de $y = 2^x$, su gráfica es la simétrica de esta última con respecto a la recta $y = x$ como se puede ver en la Figura 11.

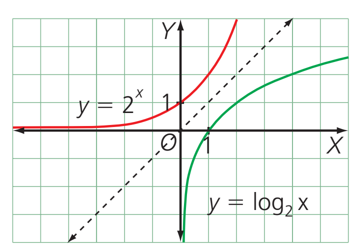


Figura 11

Ten en cuenta

John Napier

(1550-1617), matemático escocés, estudió las propiedades de los logaritmos. En su honor, los logaritmos en base e se conocen como neperianos.



Ten en cuenta

La relación entre las funciones exponenciales y las logarítmicas permite construir las gráficas de unas funciones a partir de las de otras.

Destreza con criterios de desempeño: Relacionar entre funciones exponenciales y logarítmicas.

Desarrolla tus destrezas

Razonamiento

2 Selecciona la palabra que indica de qué tipo es cada una de las siguientes funciones.

a. $y = e^{2x}$

Exponencial | Logarítmica | Ni exponencial ni logarítmica

b. $y = ex$

Exponencial | Logarítmica | Ni exponencial ni logarítmica

c. $y = \log(x + 3)$

Exponencial | Logarítmica | Ni exponencial ni logarítmica

d. $y = x \cdot \ln 2$

Exponencial | Logarítmica | Ni exponencial ni logarítmica

e. $y = 4^{-x}$

Exponencial | Logarítmica | Ni exponencial ni logarítmica

f. $y = x^3$

Exponencial | Logarítmica | Ni exponencial ni logarítmica

g. $y = \ln(2x)$

Exponencial | Logarítmica | Ni exponencial ni logarítmica

Comunicación

3 Completa la Tabla 1.

Función	Dominio
a. $y = \log(1 - x^2)$	
b. $y = \ln(x^2 - x)$	
c. $y = x + \ln x$	
d. $y = x(\ln x)^2$	
e. $y = \dfrac{\ln x}{x}$	
f. $y = x\log(x + 10)$	

Tabla 1

4 Sea la ecuación exponencial $a^x = b$ (con $a > 1$). Relaciona en tu cuaderno estas dos columnas.

$b > 0$	$x = 1$
$b = 0$	$x \notin \mathbb{R}$
$b = a$	$x = \log_a b$

5 Encuentra la función recíproca en cada caso.

a. $y = 4^x$

b. $y = \log_5 x$

c. $y = \log x$

d. $y = 7^x$

Modelación

6 A partir de la gráfica de la función $y = \ln x$, representa la gráfica de estas funciones.

$$y = -\ln x \text{ y } y = |\ln x|$$

7 Representa la función $y = 4^x$ y, a partir de su gráfica, dibuja la de la función $y = \log_4 x$.

8 Dibuja la gráfica de la función $y = \left(\dfrac{1}{2}\right)^x$ y, a partir de ella, la de $y = \log_{\frac{1}{2}} x$.

Resolución de problemas

9 El *pH* mide el carácter ácido o básico de una sustancia, y se encuentra relacionado con la concentración de iones de hidrógeno de la misma, x, que se mide en mol por litro, según la fórmula $pH = -\log x$.



a. Representa la función del *pH*.

b. El *pH* de un gel de ducha es 5,5. ¿Qué concentración de iones de hidrógeno tiene?

c. Para valores de *pH* menores que 7, la sustancia es ácida y, en caso contrario, básica. ¿Cuántos moles por litro de iones de hidrógeno puede contener una sustancia en cada caso?

10 La sonoridad o sensación auditiva de un sonido, β, se mide en decibelios (dB), y se encuentra relacionada con la intensidad de la onda sonora, I, que se mide en vatios por metro cuadrado (w/m^2).

$$\beta = 120 + 10 \log I$$

a. La intensidad de las ondas sonoras que son audibles sin producir dolor está entre 10^{-12} w/m^2 y 1 w/m^2. ¿Entre qué valores se halla comprendida la sonoridad que producen?

b. Si estás escuchando música en un reproductor MP3 con 20 decibelios, ¿cuál es la intensidad de las ondas al salir de los auriculares?

8 Ecuaciones logarítmicas

Explora

Si al triple del logaritmo del doble de un número se le suma 4, se obtiene 16.

- ¿Cuál es el número?

Si se designa con x el número buscado, la ecuación que modela la situación es:

$$4 + 3\log(2x) = 16$$

Para resolverla, se pueden aplicar la definición de logaritmo y sus propiedades, así:

$3\log(2x) = 16 - 4$	Se deja la expresión en términos del logaritmo en un lado de la ecuación.
$\log(2x) = 4$	Se divide cada lado de la igualdad entre 3.
$10^4 = 2x$	Se escribe el logaritmo en la forma exponencial equivalente.
$x = 5\,000$	Se obtiene el valor de x.

Por lo tanto, el número buscado es $x = 5\,000$.

Las ecuaciones en las que la incógnita aparece en el argumento o en la base de un logaritmo se llaman **ecuaciones logarítmicas**.

Ejemplo 1

La solución algebraica de la ecuación logarítmica $\log(x + 2) + \log(x - 1) = 1$, se observa a continuación.

$\log[(x + 2)(x - 1)] = 1$	Se aplican las propiedades de los logaritmos.
$(x + 2)(x - 1) = 10$	Se escribe el logaritmo en la forma exponencial equivalente.
$x^2 + x - 12 = 0$	Se obtiene la ecuación cuadrática correspondiente.
$x = -4$ o $x = 3$	Se resuelve la ecuación.

Al comprobar ambos valores en la ecuación de inicial, se obtiene que esta no se satisface para $x = -4$. Por lo tanto, la única solución correcta es $x = 3$.

Ten en cuenta

Propiedades de los logaritmos:

$\log_a (M \cdot N) = \log_a M + \log_a N$

$\log_a \frac{M}{N} = \log_a M - \log_a N$

$\log_a M^n = n \log_a M$

$\log_a x = 0 \Rightarrow x = 1$

Actividades resueltas

Ejercitación

1 Resuelve la ecuación $\log x^3 = 3 + 3\log 5$.

Solución:

Se aplican las siguientes propiedades.

Se expresa el 3 como un logaritmo:	$\log x^3 = \log 1000 + 3\log 5$
Logaritmo de una potencia:	$\log x^3 = \log 1000 + \log 5^3 \Rightarrow$
	$\log x^3 = \log 1000 + \log 125$
Logaritmo de un producto:	$\log x^3 = \log(1000 \cdot 125)$
Se toman antilogaritmos:	$x^3 = 1000 \cdot 125$
Se despeja x:	$x = \sqrt[3]{1000 \cdot 125} = 10 \cdot 5 = 50$

Finalmente, se sustituye este valor en la ecuación inicial para comprobar que efectivamente es solución.

Ejercitación

2 Encuentra las soluciones de la ecuación $\ln x^3 - \ln x = \ln(2x + 3)$.

Solución:

Logaritmo de un cociente:	$\ln \frac{x^3}{x} = \ln x^2 = \ln(2x + 3)$
Se toman antilogaritmos:	$x^2 = 2x + 3 \Rightarrow x^2 - 2x - 3 = 0$
Se resuelve la ecuación de segundo grado:	$x = -1, x = 3$

Al comprobar ambos valores en la ecuación de partida, se ve que para $x = -1$ se obtiene $\ln(-1)$, que no está definido, por lo que esa solución no es válida. La única solución correcta es $x = 3$.

Destreza con criterios de desempeño: Resolver ecuaciones logarítmicas aplicando las propiedades.

Desarrolla tus destrezas

Ejercitación

3 Selecciona la solución de cada ecuación.

a. $2\log_2 x = 10$

0,01	32	5

b. $\log_x 625 = 4$

0,01	32	5

c. $3\log x = -6$

0,01	2	5

d. $\ln(3 - x) = 0$

0,01	2	5

e. $\log x + \log 50 = 4$

200	0,01	0

f. $\log x + \log 100 = 0$

200	0,01	$\frac{10}{3}$

g. $\log x^3 - 2\log x = \log 10$

10	0,01	$\frac{10}{3}$

h. $\log 3x - 1 = 0$

10	0,01	$\frac{10}{3}$

4 Resuelve las siguientes ecuaciones.

a. $2\log x = 3 + \log \frac{x}{10}$

b. $\log x + \log(x + 3) = 2\log(x + 1)$

c. $\log 4 + 2\log(x - 3) = \log x$

d. $\log_3(x + 4) + \log_3(x - 4) = 2$

e. $\log_2 x - \log_2(x - 1) = 4$

Comunicación

5 Encuentra la solución de cada ecuación y aproxímala a las centésimas.

a. $\ln x = \ln 3 - \ln x$

b. $\log x^3 - \log x = \log(2x - 1)$

Razonamiento

6 Encuentra el error en cada procedimiento.

a. $\log(x + 1) - \log 2 = \log x$

$\Rightarrow \log\left(\frac{x+1}{2}\right) = \log x \Rightarrow \left(\frac{x+1}{2}\right) = x$

$\Rightarrow x + 1 = 2x \Rightarrow x = 1$

b. $\log(x - 2) \cdot \log 2 = \log x$

$\Rightarrow \log(x - 2)^2 = \log x \Rightarrow (x - 2)^2 = x$

$\Rightarrow x^2 - 5x + 4 = 0 \Rightarrow x = 4, x = 1$

Resolución de problemas

7 Observa en la Figura 1, las gráficas de las funciones $y = \ln x$ y $y = -\ln(x - 2)$. Luego, responde.

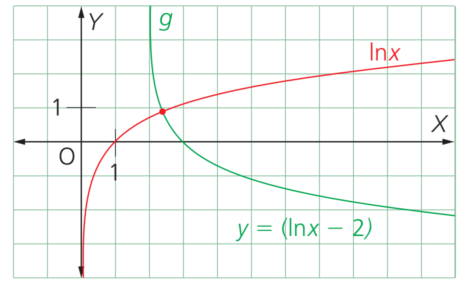


Figura 1

a. ¿En qué coordenada aproximada se cortan las dos gráficas?

b. Resuelve algebraicamente la ecuación $\ln x = -\ln(x - 2)$ y comprueba el resultado del literal anterior.

8 En un estudio sobre animales, el número promedio de especies P encontradas en un terreno de área A (en metros cuadrados), está dada por la siguiente ecuación

$$\log P = \log 13 + 0{,}6 \log A$$

a. Despejar P en la ecuación

b. ¿Cuántas especies de animales encontraron en un área de 5m2?

9 Una persona conduce un automóvil en un día de invierno (20º F en el exterior) y el motor se sobrecalienta (acerca de 220º F). Cuando se estaciona, el motor comienza a enfriarse. La temperatura T del motor t minutos después de que se estaciona satisface la ecuación

$$\ln\left(\frac{T - 20}{200}\right) = -0{,}11t$$



a. Despeja T en la ecuación.

b. Usa la respuesta del literal a para determinar la temperatura del motor después de 20 minutos.

Operaciones con funciones

Comunicación

1. Calcula las operaciones que se indican a continuación, si sabes que:

$$f(x) = x^2 + x \qquad g(x) = -x + 3$$

a. $2f + g$

b. $f \cdot g + g \cdot f$

c. $\dfrac{f}{2g}$

d. $2g - 2f$

2. Obtén la gráfica de la suma de las funciones representadas en la Figura 1.

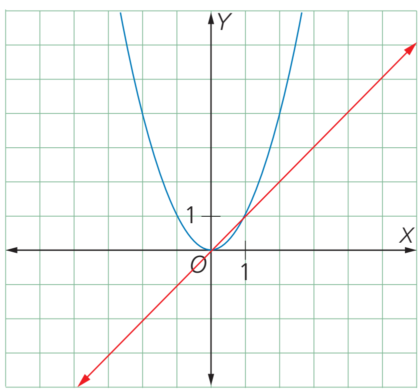


Figura 1

Funciones inversas

Comunicación

3. Determina la función inversa de cada función dada. Luego, represéntalas gráficamente.

a. $f(x) = x^2 + x$

b. $f(x) = 3x + 2$

c. $f(x) = x^3 + 3$

d. $f(x) = \dfrac{x}{4} - 5$

Funciones polinómicas

Comunicación

4. Representa las siguientes funciones.

a. $f(x) = x^4 + x + 6$

b. $f(x) = 3x^3 + x^2$

c. $f(x) = x^4 + x^3 + x - 2$

d. $f(x) = x^3 - 5$

e. $f(x) = x^3 + x^2 + 3x - 1$

f. $f(x) = x^4 - 16$

Razonamiento

5. Determina el valor al que tiende la función representada en la Figura 2, en cada caso.

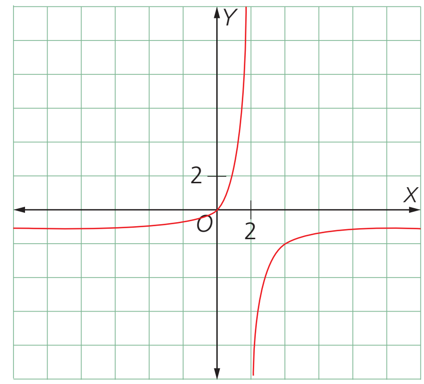


Figura 2

a. Cuando x se acerca a 0.

b. Cuando x se acerca a 2.

c. Cuando x se acerca a $+\infty$

d. Cuando x se acerca a $-\infty$.

Funciones exponenciales y logarítmicas

Razonamiento

6. Representa las funciones de cada par en un mismo plano cartesiano. Luego, describe las semejanzas y las diferencias entre ellas.

a. $f(x) = \left(\dfrac{1}{2}\right)^x$ y $g(x) = 2^x$

b. $f(x) = \left(\dfrac{1}{3}\right)^x$ y $g(x) = 3^x$

c. $f(x) = \left(\dfrac{1}{4}\right)^x$ y $g(x) = 4^x$

d. $f(x) = \log_2 x$ y $g(x) = \log_{\frac{1}{2}} x$

e. $f(x) = \log_3 x$ y $g(x) = \log_{\frac{1}{3}} x$

Ecuaciones exponenciales y logarítmicas

Ejercitación

7. Resuelve las siguientes ecuaciones.

a. $2^{x+4} = 4^x$

b. $3^{2x+2} = 3^{3x-1}$

c. $4^{x^2 - x} = 16$

d. $\log x + \log(x + 3) = 1$

e. $\log (x + 5) - \log (2x - 1) = 0$

Resolución de Problemas

Problema

Si se depositan $ 1 500 a un interés compuesto del 12% anual, liquidable trimestralmente. Si el capital después de t trimestres está dado por la expresión $A(t) = p\left(1+\frac{0{,}12}{4}\right)^t$ ¿cuál es el monto al cabo de cinco años?

1. Comprende el problema

- ¿Qué información aporta el enunciado?
  R: El monto del capital, el porcentaje anual y la expresión que permite calcular el capital.
- **¿Qué debes encontrar?**
  R: A cuánto asciende el capital al cabo de cinco años

2. Crea un plan

- Identifica cada uno de los elementos de la fórmula que te dan y luego calcula el monto del capital en el tiempo dado.

3. Ejecuta el plan

- En la fórmula, p representa el capital inicial que se deposita a interés compuesto.
- 0,12 significa el interés del 12% anual liquidable trimestralmente.
- Como el año comercial tiene cuatro trimestres, el 12% dividido en cuatro, significa el interés acumulado por trimestre.
- El exponente t, indica el número de trimestres en el que se quiere calcular el monto final.
- En cinco años hay un total de 20 trimestres, luego al aplicar la fórmula se tiene:

$$A(20) = 1\,500\left(1+\frac{0{,}12}{4}\right)^{20}$$
$$= 1\,500\,(1{,}806)$$
$$= 2\,709$$

R: Cinco años después, el monto del capital será $ 2 709.

4. Comprueba la respuesta

- Verifica que en dos años y medio el monto del capital no es la mitad del monto a los cinco años.

Aplica la estrategia

1. Si se pone un capital de $ 2 000 000 a un interés compuesto del 13% semestral durante 5 años, ¿cuál es el monto acumulado?

a. Comprende el problema

....

b. Crea un plan

....

c. Ejecuta el plan

....

d. Comprueba la respuesta

....

Resuelve otros problemas

2. Si se tienen las funciones $f(x) = x^2 - 1$ y $g(x) = \sqrt{2x-3}$, ¿es posible evaluar $(f \circ g)(x)$, para $x = 1$ y para $x = 3$? Explica.

3. Observa la la Figura 1.

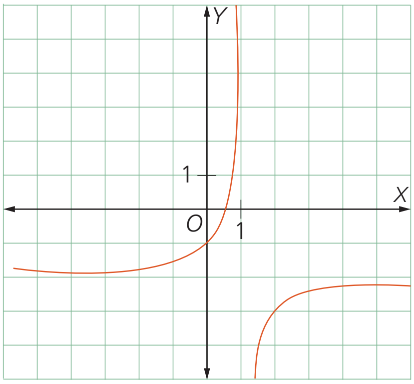


Figura 1

¿Puedes identificar las asíntotas de esta función? ¿Cómo las describes analíticamente?

4. Un paciente elimina un medicamento a través de la orina. Para una dosis de 10 mg, la cantidad en el cuerpo luego de t horas está dada por la expresión $A(t) = 10(0{,}8)^t$. ¿Qué cantidad de medicamento queda aún en el cuerpo luego de 8 horas de la dosis inicial?

Formula problemas

5. Invento un problema que involucre la siguiente información y resuélvelo.

"La tasa de crecimiento de una población está dada por la expresión $p(x) = 3\,500\,000\,(1{,}01)^x$"

9 Regularidades y sucesiones

Explora

En la Figura 1 se muestra una secuencia de triángulos construidos con palillos.

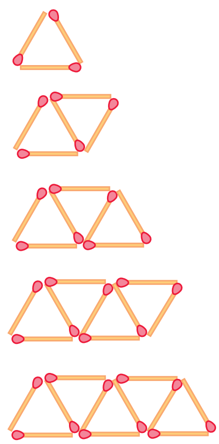


Figura 1

- ¿Cuántos palillos se necesitarán para construir una figura que tenga diez triángulos, y una con n triángulos?

App

Regularidades y sucesiones

Abre la aplicación *Find Next Number* y juega a encontrar el siguiente número en una sucesión.



9.1 Regularidad

Para determinar cuántos palillos se necesitarán para construir una figura que tenga diez triángulos y una con n triángulos, se construye la Tabla 1.

Número de triángulos	1	2	3	4	5	...	10	...	n
Número de palillos	3	5	7	9	11	...	?	...	?

Tabla 1

Se observa que el número de palillos sigue una cierta secuencia. Para añadir un nuevo triángulo se necesitan dos palillos más. Así, para construir diez triángulos se necesitan tres palillos para el triángulo inicial, y luego, dos palillos por cada uno de los nueve triángulos restantes, es decir:

$$3 + 2 \cdot 9 = 21$$

Si se construyen n triángulos, se necesitarán tres palillos para el triángulo inicial y luego dos palillos por cada uno de los $n - 1$ triángulos restantes, es decir:

$$3 + 2(n - 1) = 3 + 2n - 2 = 2n + 1$$

Una secuencia de números presenta **regularidad** si, a la vista de unos cuantos de éstos, se pueden obtener los siguientes.

Ejemplo 1

En la Tabla 2 se observa el número de diagonales de algunos polígonos de acuerdo al número de lados de los mismos.

Número de lados	3	4	5	6	7	8	9
Diagonales	0	2	5				

Tabla 2

Para completar la tabla se lleva a cabo el siguiente razonamiento:

Si un polígono tiene n vértices, el número de diagonales que se pueden construir por cada vértice es $n - 3$. Como el polígono tiene n vértices el anterior valor se multiplica por $n(n - 3)$. Al construir las diagonales de cada vértice se observa que cada una se construye dos veces. Por lo anterior, es necesario dividir la anterior cantidad entre dos y se obtiene $\frac{n(n-3)}{2}$

Al utilizar la fórmula anterior para completar la Tabla 3, se obtiene:

Número de lados	3	4	5	6	7	8	9
Diagonales	0	2	5	9	14	20	27

Tabla 3

Ejemplo 2

Para hallar el número de diagonales de un polígono de 11 lados, se reemplaza n por 11 en la fórmula $\frac{n(n-3)}{2}$ y se obtiene:

$$\frac{n(n-3)}{2} = \frac{11(11-3)}{2} = 44 \text{ diagonales}$$

Destreza con criterios de desempeño: Identificar sucesiones, encontrar algunos de sus términos y su término general.

Ejemplo 3

Un número triangular es aquel que puede ser recompuesto en la forma de un triángulo equilátero. En la Figura 2 se representan los cinco primeros números triangulares.

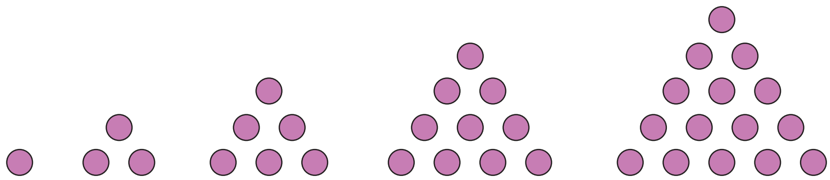


Figura 2

Los cinco primeros números triangulares son: 1, 3, 6, 10 y 15, y corresponden al número de puntos que forma cada triángulo equilátero.

Para hallar el n-ésimo número triangular se utiliza la fórmula $\frac{n(n+1)}{2}$. Así, el triangular número 24 es

$$\frac{24\,(24+1)}{2} = 300$$

Ten en cuenta

Las sucesiones tienen un primer término pero no un último, es decir, tienen infinitos términos.

a_5

Quinto término ↗ ↖ Índice

9.2 Sucesiones de números reales

Las secuencias infinitas de números reales se conocen como **sucesiones**.

Una sucesión de números reales se representa por

$$\{a_1, a_2, a_3..., a_n...\} \text{ o por } \{\boldsymbol{a_n}\}$$

Cada número se denomina **término** y se designa por una letra y un número llamado **índice**, que indica el lugar que ocupa en la sucesión. Así, a_1 es el primer término; a_2, el segundo, etc. A $\boldsymbol{a_n}$ se le conoce como **enésimo término**, o término general, y representa un término cualquiera de la sucesión.

Ejemplo 4

Observa cómo se halla el siguiente término en cada secuencia de números reales.

a. {10, 7, 4, 1, −2…} **b.** {64, 32, 16, 8, 4…}

a. Cada término se obtiene sustrayendo 3 al anterior, el siguiente es −5.

b. Cada término se halla dividiendo el anterior por 2, el siguiente es 2.

Dependiendo del comportamiento de sus términos, las sucesiones infinitas pueden ser crecientes, decrecientes, oscilantes, alternadas o constantes.

Una sucesión es **creciente** si cada término es mayor o igual que el anterior.

Ejemplo 5

Son sucesiones crecientes:

{4, 8, 8, 12, 12, 12, 16, 16, 16, 16…} {1, 3, 5, 7, 9, 11, 13…}

9 Regularidades y sucesiones

Una sucesión es **decreciente** si cada término es menor o igual que el anterior.

Ejemplo 6

Los siguientes son ejemplos de sucesiones decrecientes:

$\{15, 14, 12, 9, 5, 0, -6, -13...\}$ $\left\{\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{6}, \frac{1}{8}, \frac{1}{10} ...\right\}$

Una sucesión es **oscilante** si sus términos alternan de mayor a menor o viceversa.

Ejemplo 7

La sucesión $\{2, 1, 4, 2, 3, 2, 5...\}$ es oscilante, pues al comparar sus términos se observa que el segundo es menor que el primero, pero el tercero es mayor que el segundo, etc.

Una sucesión es **alternada** si se alternan los signos de sus términos.

Ejemplo 8

Observa los términos de la sucesión:

$$\{-1, 2, -3, 4, -5...\}$$

Esta sucesión es alternada, pues el primer término es negativo; el segundo, positivo; el tercero, negativo, etc.

Una sucesión es **constante** cuando todos sus términos tienen el mismo valor.

Ejemplo 9

La siguiente es una sucesión constante.

$$\{-3, -3, -3, -3, -3...\}$$

Razonamiento matemático

Propiedades de las sucesiones

En relación con las sucesiones es válido hablar de algunas propiedades de las operaciones entre ellas.

- ¿Cuáles de las siguientes propiedades se verifican para las sucesiones?

$\{a_n\} + \{b_n\} = \{b_n\} + \{a_n\}$

$\{a_n\} - \{b_n\} = \{b_n\} - \{a_n\}$

$\{a_n\} \cdot \{b_n\} = \{b_n\} \cdot \{a_n\}$

$\{a_n\} \div \{b_n\} = \{b_n\} \div \{a_n\}$

Actividades resueltas

Razonamiento

1 Halla los dos términos siguientes de las sucesiones.

a. 4, 8, 16, 32, 64… **b.** $7, \frac{7}{2}, \frac{7}{4}, \frac{7}{8}, \frac{7}{16}...$

Solución:

a. Como cada término se obtiene multiplicando por 2 el anterior, los dos términos son 128 y 256.

b. Los dos términos son $\frac{7}{32}$ y $\frac{7}{64}$, ya que cada uno se halla multiplicando por $\frac{1}{2}$ el anterior.

Comunicación

2 Clasifica cada sucesión según sea creciente, decreciente, oscilante, alternada o constante.

a. $\{1, 2, 3, 4...\}$ **b.** $\{-5, 10, -15, 20...\}$

c. $\left\{\frac{1}{2}, \frac{2}{4}, \frac{3}{6}, \frac{4}{8} ...\right\}$ **d.** $\left\{\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, 0 ...\right\}$

Solución:

a. Creciente **b.** Alternada **c.** Constante **d.** Decreciente

Destreza con criterios de desempeño: Identificar sucesiones, encontrar algunos de sus términos y su término general.

Desarrolla tus destrezas

Ejercitación

3 Escribe los siguientes cinco términos de cada sucesión.

a. $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}...$ b. $-4, -2, 0...$ c. $\frac{1}{9}, \frac{1}{3}, 1...$

Razonamiento

4 Halla los siguientes tres términos de cada sucesión.

a. 12, 12, 12, 12, 12... b. 21, 23, 25, 27, 29...

c. 80, 70, 60, 50, 40... d. $\frac{1}{8}, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, 1, 2...$

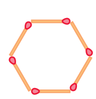
5 Escribe el término que falta en cada sucesión.

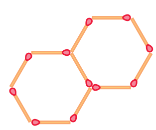
a. 17, 15, 13, $\square$, 9, 7... b. 60, 56, $\square$, 48, 44...

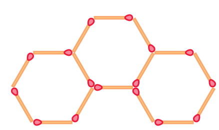
c. $\frac{31}{5}, \frac{29}{5}, \square, 5, \frac{24}{5}...$ d. 13, 10, 7 $\square$, 1, -2...

6 Lee y responde.

Las figuras 3 a 5 se construyeron con cerillas.


Figura 3


Figura 4


Figura 5

a. ¿Cuántas cerillas se necesitan para formar una figura con 15 hexágonos?

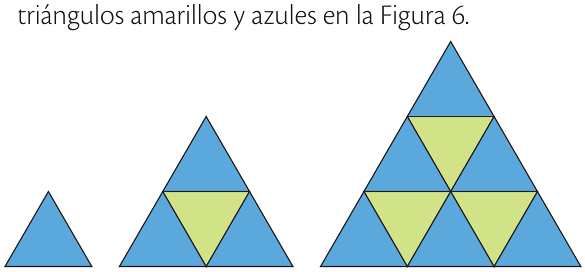
b. ¿Cuántas cerillas se necesitan para formar una figura con *n* hexágonos?

7 Completa el término que falta en cada sucesión.

a. 8, 10, 12, $\square$, 16... b. 35, $\square$, 25, 20, 15...

c. 0, 3, $\square$, 9, 12... d. $5, \frac{5}{3}, \frac{5}{9}, \square, \frac{5}{81}...$

8 Escribe los cinco primeros elementos de las sucesiones que determinan respectivamente el número de triángulos amarillos y azules en la Figura 6.


Figura 6

9 Averigua y escribe el término que falta en las siguientes sucesiones:

a. $\frac{2}{3}, \frac{4}{3}, \square, \frac{16}{3}, \frac{32}{3}...$

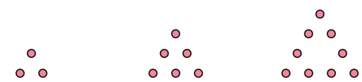
b. $-9, -6, -3, \square, 3...$

c. $27, -9, \square, -1, \frac{1}{3}...$

Modelación

10 Encuentra el término general de cada sucesión estudiando sus regularidades.

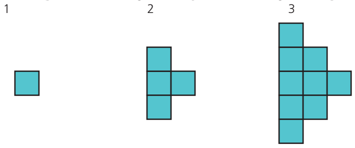
a.



$a_1 = 3$ $a_2 = 6$ $a_3 = 9$

Figura 7

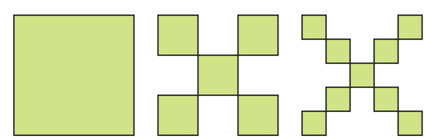
b.



$b_1 = 1$ $b_2 = 4$ $b_3 = 9$

Figura 8

c.



$c_1 = 1$ $c_2 = 5$ $c_3 = 9$

Figura 9

Resolución de problemas

11 Las abejas construyen panales con formas hexagonales. El segundo hexágono que construyen lo hacen utilizando un lado del primero.

A partir del tercer hexágono, lo construyen utilizando siempre dos lados de hexágonos ya construidos.

Si se entiende como unidad de cera la cantidad de este material necesaria para construir un lado de un hexágono, se verificará que:

- Para construir un panal de una celda se necesitan seis unidades de cera.
- Para construir un panal de dos celdas se necesitan once unidades de cera.
- Para construir un panal de tres celdas se necesitan 15 unidades de cera.

¿Cuántas celdas tendrá un panal que precisa de 51 unidades de cera para su construcción?

Prueba Ser Estudiante

A continuación se presentan ejercicios con cuatro alternativas de solución, de las cuales, una sola es la correcta. Señala en la tabla de respuestas, el literal que consideres correcto.

1. La función recíproca de $f(x) = y = 3x - 1$ es:

A. $f^{-1}(x) = \frac{x+1}{3}$

B. $f^{-1}(x) = \frac{x-1}{3}$

C. $f^{-1}(x) = \frac{x-3}{1}$

D. $f^{-1}(x) = \frac{x+3}{1}$

2. Calcula la función inversa de $f(x)$, en la función $f(x) = 3x + 7$

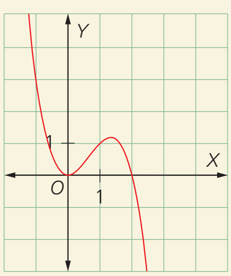
A. $f^{-1}(x) = \frac{x-3}{7}$

B. $f^{-1}(x) = \frac{x-7}{3}$

C. $f^{-1}(x) = \frac{x+3}{7}$

D. $f^{-1}(x) = \frac{x+7}{3}$

3. La función polinómica que corresponde a la siguiente gráfica es:



A. $P(x) = x(x^2 - 4)$

B. $Q(x) = -x^2(x^2 - 4)$

C. $R(x) = x^4 + 2x^3$

D. $P(x) = -x^3 + 2x^2$

4. El resultado de la potencia $2^{0,27}$ es:

A. 1,106

B. 2,246

C. 1,206

D. 2,206

5. La solución de la potencia $\left(\frac{1}{5}\right)^{-1,15}$ es:

A. 6,365

B. 5,375

C. 7,355

D. 4,345

6. La función creciente es:

A. $y = \left(\frac{1}{6}\right)^x$

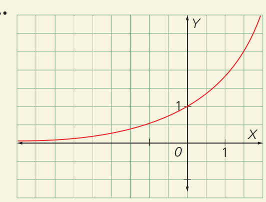
B. $y = 5^{-x}$

C. $y = 7^x$

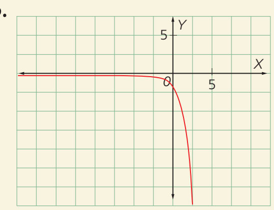
D. $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$

7. La gráfica de la función exponencial $y = 7^x$, es:

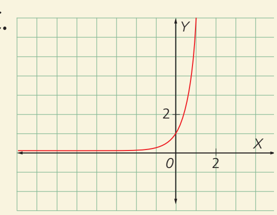
A.



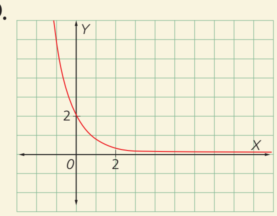
B.



C.



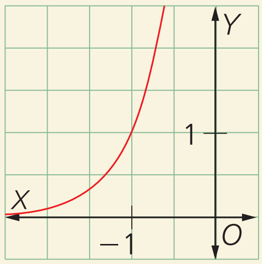
D.



Indicadores de logro:

- Opera con funciones.
- Encuentra funciones inversas.
- Analiza funciones polinómicas, exponenciales y logarítmicas.
- Resuelve ecuaciones exponenciales y logarítmicas.
- Determina elementos de sucesiones.

8. La expresión algebraica que corresponde a la función representada en la gráfica es:



A. $y = 10^{-x-1}$

B. $y = 10^{x+1}$

C. $y = 10^{-x}$

D. $y = 10^{-x+1}$

9. El dominio de todas las funciones exponenciales con base 10 es:

A. $\mathbb{Q}$ B. $\mathbb{R}$

C. $\mathbb{Z}$ D. $\mathbb{I}$

10. El elemento radiactivo Carbono 14 se utiliza para determinar la antigüedad de ciertos fósiles. Si el Carbono 14 decae a una rapidez de 0,012% anual, y un hueso animal tenía originalmente 20 gramos de Carbono 14 hace 2 000 años, ¿cuál es la cantidad de Carbono 14 que tiene en la actualidad?

A. 18,75 gramos

B. 15,76 gramos

C. 19,76 gramos

D. 17,75 gramos

11. La solución de la ecuación $100(1{,}04)^{2t} = 300$ es:

A. 10,07 B. 107,04

C. 10,04 D. 14,07

12. Una sucesión oscilante se define:

A. si cada término es mayor o igual que el anterior

B. si sus términos alteran de mayor a menor viceversa

C. si se alteran los signos de sus términos

D. si sus términos tienen el mismo valor

13. Una sucesión decreciente se define:

A. si cada término es mayor o igual que el anterior

B. si sus términos alteran de mayor a menor viceversa

C. si cada término es menor o igual que el anterior

D. si sus términos tienen el mismo valor

14. El número que falta en la sucesión $\frac{1}{5}, \frac{3}{5}, \frac{9}{5}, \square$ es:

A. $\frac{18}{5}$ B. $\frac{15}{5}$

C. $\frac{27}{5}$ D. $\frac{24}{5}$

15. El quinto término de la sucesión $\frac{1}{5}, \frac{1}{25}, \ldots$, es:

A. $\frac{1}{3125}$ B. $\frac{1}{625}$

C. $\frac{1}{15\,625}$ D. $\frac{1}{125}$

Tabla de respuestas

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A
B	B	B	B	B	B	B	B	B	B	B	B	B	B	B
C	C	C	C	C	C	C	C	C	C	C	C	C	C	C
D	D	D	D	D	D	D	D	D	D	D	D	D	D	D

Evaluación de la unidad

Operaciones con funciones

Ejercitación

1. Selecciona la expresión correspondiente a $f \circ g$, si se sabe que $f(x) = x^2 + 1$ y $g(x) = x - 1$.

a. x 	b. x^2

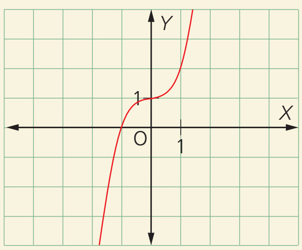
c. $x^2 - 2x$ 	d. $x^2 - 2x + 2$

Funciones inversas

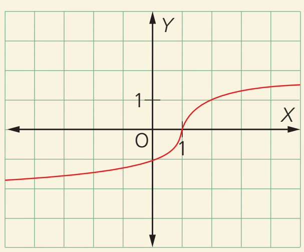
Modelación

2. Selecciona la gráfica en la que se ha representado la función inversa de $f(x) = x^3 + 1$.

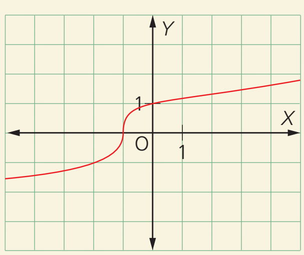
a.



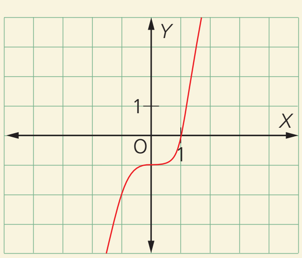
b.



c.



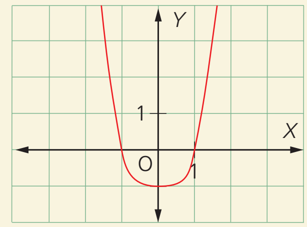
d.



Funciones polinómicas

Razonamiento

3. Observa la gráfica de la función $g(x) = x^4 - 1$ y responde las preguntas. Justifica tus respuestas.



a. ¿La gráfica corresponde a una parábola?

b. ¿Cuál es el dominio de la función?

c. ¿Y el rango?

d. ¿Es continua en todo su dominio?

Modelación

4. Analiza la función $f(x) = \dfrac{2}{x + 1}$ y responde verdadero (V) o falso (F), según corresponda.

a. La gráfica de la función intersecta al eje de las ordenadas en el punto (0, 2). ( )

b. El dominio de la función es $\mathbb{R}$. ( )

c. El rango de la función es $\mathbb{R} - \{0\}$. ( )

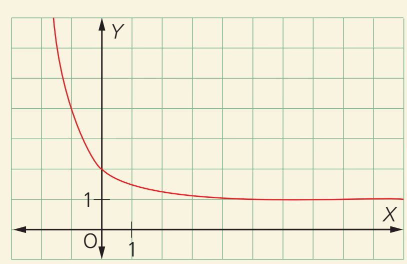
d. La función no tiene inversa. ( )

e. La función es decreciente. ( )

Funciones exponenciales

Ejercitación

5. Determina lo que se indica en cada caso.



a. Dominio de la función

b. Rango de la función

c. Intersecto con el eje X

d. Intersecto con el eje Y

e. Asíntota horizontal

Resolución de problemas

7. Una bacteria se duplica cada 20 minutos. Determina la expresión en función del tiempo que modele la variación la población de bacterias, si al inicio del experimento hay 20 bacterias.

Función exponencial $y = 10^x$

Razonamiento

8. Determina una expresión algebraica en la que se despeje la variable x de la expresión: $3{,}16 = 10^x$.

Ejercitación

9. Relaciona cada expresión con su correspondiente potencia en la columna de la derecha.

a. $10^{-1{,}2}$	• 0,630 95
b. $10^{\frac{4}{5}}$	• 0,063 095
c. $10^{-2{,}2}$	• 0,006 3095
d. $10^{1{,}8}$	• 6,309 5
e. $10^{-0{,}2}$	• 63,095

Ecuaciones exponenciales

Ejercitación

10. Selecciona la solución de la ecuación $\left(\frac{1}{5}\right)^x = 25^{3x+12}$.

a. $\frac{24}{7}$ b. $-\frac{24}{7}$

c. $\frac{7}{24}$ d. $-\frac{7}{24}$

Resolución de problemas

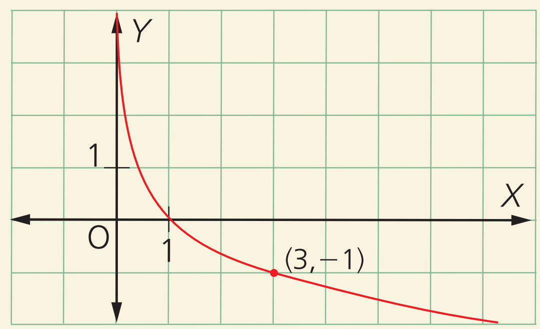
11. El interés compuesto representa el acumulado de intereses que genera un capital durante un tiempo determinado, en el interés compuesto, el interés que se genera en el periodo de tiempo se reinvierte. La expresión que permite calcular el monto después de t años está dado por la expresión $P = C\,(1+r)^t$ donde C es el capital invertido, r la tasa de interés.

Calcula el monto después de cinco años y medio si se invierten $ 500 000 a una tasa de interés del 2,68% anual.

Funciones logarítmicas

Modelación

12. Identifica la función de la forma $y = \log_a x$ para la siguiente gráfica.



Ecuaciones logarítmicas

Resolución de problemas

13. La expresión $v(t) = 75\,(e^{-0{,}5t} - 1)$ determina la velocidad de descenso de un paracaidista. ¿Después de cuánto tiempo la velocidad es de 65 m/s?

Regularidades y sucesiones

Razonamiento

14. Elige la respuesta correcta.

Para el viaje de excursión, un estudiante decide guardar en el primer día $ 2, al segundo día $ 3, al tercer día $4, y así sucesivamente. ¿Cuánto dinero tendrá luego de 10 días?

a. $ 97

b. $ 86

c. $ 65

d. $ 44

Realiza una encuesta en el colegio

Una encuesta es una investigación que se basa en un conjunto de datos relacionados con un tema particular.

Para obtener los datos, se siguen procedimientos bien definidos con la intención de hacer mediciones cuantitativas de diferentes características de la población que se relacionen con el aspecto que se quiere estudiar.

A pesar de que una encuesta se implementa en una parte o muestra representativa de la población, se realiza con el ánimo de obtener resultados que puedan trasladarse a la población completa.



Pasos para realizar una encuesta

Una manera de garantizar el éxito de una encuesta consiste en seguir estos pasos:

1 Preparación de la encuesta

a. Establece para qué o por qué quieres realizarla

En primer lugar, debes definir un objetivo en el que establezcas las razones por las que quieres hacer la encuesta. En este caso, elige un objetivo relacionado con conocer los intereses de tus compañeros acerca de un tema específico y formúlalo a partir de una pregunta.

b. Cualidades o cantidades

Define qué aspecto quieres estudiar en el colegio. Si deseas observar opiniones, pensamientos o cualidades, tus preguntas deberán ser abiertas y con enfoque cualitativo; pero si quieres medir la cantidad de estudiantes frente a algún interés, las preguntas deberán tener un enfoque cuantitativo, por lo que serán cerradas y con una única respuesta.



SM Ediciones

c. A quién vas a encuestar

Determina quiénes serán las personas a las cuales vas a aplicar la encuesta para obtener la información requerida. Ten en cuenta que estas personas deben constituir una muestra representativa de la población del colegio.

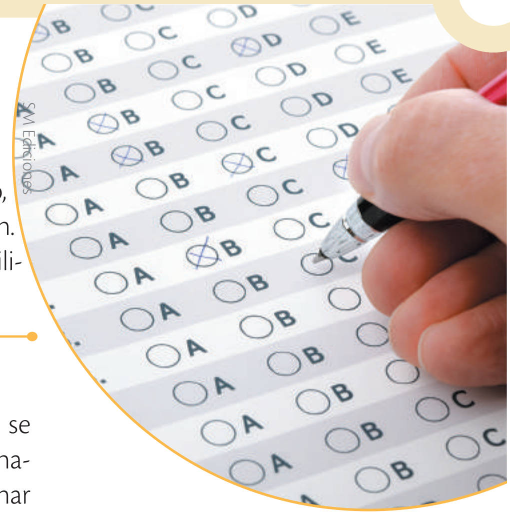
d. Qué vas a preguntar en la encuesta

Un cuestionario debe contener preguntas abiertas y cerradas, según el objetivo y los medios para aplicarlo. Las preguntas también pueden clasificarse en función de su contenido:

- identificación: edad, sexo, nacionalidad, etc.
- hecho: referidas a acontecimientos concretos.
- acción: relacionadas con alguna actividad.
- intención: para conocer la intención del encuestado.
- opinión: para conocer la opinión del encuestado.

e. Elaboración del cuestionario

Un factor importante, que determina el resultado de una encuesta, es el cuestionario. Este debe redactarse de manera que las preguntas formuladas correspondan a la información que se desea obtener. Para ello, se debe cuidar la manera de presentarlas y el orden en que se formulan. Además deben ser excluyentes, exhaustivas y presentar todas las posibilidades de respuesta.


SM Ediciones

2 Recolección y análisis de los datos

a. Una vez hayas definido las preguntas que incluirás en el cuestionario, se pasa a implementar la encuesta. Determina con anterioridad si quieres hacer una entrevista y formular las preguntas directamente o proporcionar el cuestionario a cada persona para que lo conteste de manera individual. Luego, implementa la encuesta y recolecta la información.

b. Para llevar a cabo el recuento y resumen de los datos puedes utilizar una tabla como la que se presenta a continuación:

Género musical preferido por los estudiantes de 8.º y 9.º

Curso / Género	Niñas octavo	Niñas noveno	Niños octavo	Niños noveno
Rock	4	3	1	2
Rap	2	4	5	3
Electrónica	3	2	2	4
Reggae	1	5	4	5
Otros	5	1	3	1
Total por curso	15	15	15	15

c. A partir de los datos consignados en la tabla puedes analizar diferentes aspectos: respuestas con la mayor o la menor frecuencia, promedio de respuestas para las diferentes preguntas o porcentajes de respuestas de cada pregunta con respecto al total, entre otros.


SM Ediciones

Encuestas y matemáticas

Trabajo en grupo

Las encuestas son instrumentos importantes de carácter estadístico que te permiten recolectar, organizar y analizar información; facilitan el estudio de un fenómeno particular y permiten hacer conjeturas sobre el comportamiento futuro de dicho fenómeno, mediante el uso de las matemáticas.

1. Escriban una lista de aspectos, relacionados con los estudiantes del colegio, que te gustaría analizar.

2. Preparen una encuesta sobre alguno de los aspectos que consideraste en la lista anterior. Comparte tus conclusiones con tus compañeros.

Glosario

A

Altura de un prisma. Segmento que une las bases de un prisma y es perpendicular a estas.

Altura de una pirámide. Segmento que va desde el vértice hasta el plano de la base y es perpendicular a este.

Ángulos alternos externos. Ángulos que se forman en lados opuestos con respecto a una transversal que corta dos rectas no adyacentes.

Ángulos alternos internos. Ángulos que se forman internamente, en lados opuestos con respecto a una transversal que corta dos rectas no adyacentes.

Ángulos suplementarios. Ángulos cuyas medidas suman 180º.

Arista. Segmento en el que se intersectan dos caras de un poliedro.

B

Baricentro. Punto en que concurren las medianas de un triángulo.

Binomio. Expresión algebraica que tiene dos términos.

Bisectriz. Recta que pasa por el eje de simetría de un ángulo.

C

Circuncentro. Punto de concurrencia de las mediatrices de los lados de un triángulo.

Coeficiente. Constante que multiplica la parte literal de un término algebraico.

Cuadrado perfecto. Número que se obtiene al elevar otro número al cuadrado o a la dos.

D

Decimal. Forma de escribir los números racionales e irracionales. Consta de una parte entera y una decimal, separadas por una coma.

Decimal exacto. Número cuya parte decimal es finita.

Decimal periódico. Número cuya parte decimal está compuesta por una cifra o un conjunto de cifras que se repiten hasta el infinito.

Desigualdad. Relación de comparación que se establece entre dos números con el fin de indicar cuál es el mayor o el menor.

Dominio. Conjunto compuesto por los primeros componentes de los pares ordenados de una función.

E

Ecuación. Igualdad entre expresiones algebraicas, que solo es cierta para algún o algunos valores de las variables.

Ecuaciones equivalentes. Ecuaciones que tienen el mismo conjunto solución.

Ecuación lineal. Ecuación de la forma $ax + b = 0$, donde a y b son números reales, x representa la incógnita y $a \neq 0$.

Esfera. Es un sólido tal que todos los puntos de su superficie están a una misma distancia de un punto fijo llamado centro.

Espacio muestral. Conjunto formado por los posibles resultados de un experimento aleatorio.

Evento. Cualquier subconjunto de un espacio muestral.

Eventos dependientes. Eventos en donde la ocurrencia de uno afecta la ocurrencia del otro y, por lo tanto, su probabilidad.

Eventos independientes. Eventos en donde la ocurrencia de uno no afecta la ocurrencia del otro y, por lo tanto, no afecta su probabilidad.

Experimento aleatorio. Experimento del cual no se puede prever el resultado.

Expresión algebraica. Toda expresión compuesta por términos separados por los singos de las operaciones fundamentales.

Expresión algebraica irracional. Expresión algebraica en la que aparece alguna variable bajo el signo radical.

Expresión algebraica racional. Expresión algebraica en la que aparece alguna variable en el denominador.

F

Fórmula. Ecuación que muestra una relación entre dos o más variables.

Fracción algebraica. Es el cociente entre dos polinomios.

Frecuencia absoluta. Es el número o cantidad de veces en que se produce un resultado o un experimento estadístico.

Frecuencia relativa. Es el resultado de dividir la frecuencia absoluta entre el número de veces que se realiza el experimento estadístico.

Función. Regla de correspondencia o fórmula que asigna a cada elemento de un conjunto A un único elemento de un conjunto B.

Función afín. Función de la forma $y = mx + b$, donde m y b son constantes.

Frecuencia cuadrática. Ecuación polinómica de segundo grado, del tipo $f(x) = ax^2 + bx + c$, en la que los coeficientes a, b y c son números reales. La representación de la función equivale a una parábola.

Función lineal. Función de la forma y = mx, donde m es una constante.

G

Grado de un monomio. Exponente de la variable, si un monomio tiene una sola variable, o la suma de los exponentes de las variables cuando el monomio tiene más de una variable.

Grado de un polinomio. Es el mayor de los exponentes de las partes literales de los términos que componen un polinomio.

I

Incentro. Punto donde se cortan las bisectrices de los ángulos de un triángulo.

Incógnita. Cada una de las letras distintas que aparecen en una ecuación.

Inecuación. Relación de desigualdad entre expresiones algebraicas.

L

Línea poligonal. Unión de varios segmentos que no tienen más elementos comunes que sus extremos.

Logaritmo. Se define como logaritmo en base a de un número b, a otro número c tal que a elevado al exponente c da como resultado el número a.

$$Log_a b = c \Leftrightarrow a^c = b$$

M

Media aritmética. Promedio entre todos los datos de una distribución estadística. Se calcula sumando todos los datos y dividiendo este resultado entre el número total de datos.

Mediana (estadística). Valor que ocupa el lugar central entre todos los valores de una tabla de frecuencias.

Mediana (geometría). Segmento que va desde un vértice del triángulo al punto medio del lado opuesto.

Mediatriz. Recta que pasa por el eje de simetría de un segmento.

Medidas de tendencia central. Valores alrededor de los cuales tienden a concentrarse los datos de una distribución estadística.

Mínimo común múltiplo (m.c.m.). Menor múltiplo compartido por dos o más números.

Moda. Valor que tiene la mayor frecuencia absoluta en una distribución estadística.

Monomio. Expresión algebraica en la que se operan solo productos y potencias. Por lo tanto, está compuesto por un solo término.

Monomios semejantes. Monomios que tienen la misma parte literal y, por lo tanto, el mismo grado.

N

Notación científica. Forma de escribir un número como producto de un número entre 1 y 10 por una potencia de 10.

Número irracional. Número que no se puede escribir como el cociente entre dos números enteros.

Número racional. Número que se puede expresar como el cociente de dos números enteros siempre y cuando el divisor sea diferente de 0.

Números reales. Unión de los conjuntos de los números racionales e irracionales.

O

Ortocentro. Punto de concurrencia de las alturas de un triángulo.

Ortoedro. Es el paralelepípedo recto de base rectangular.

P

Paralelepípedo. Prisma de seis caras con forma de paralelogramos. Cuando todas las caras son rectángulos, el paralelepípedo es recto.

Parte literal de un término. Es la parte de un término conformada por las variables con sus respectivos exponentes.

Pendiente. En la recta dada por la ecuación $y = mx + b$, el valor m corresponde a una constante diferente de cero, denominada pendiente. Está relacionada con la inclinación de la recta.

Polígono cóncavo. Es aquel en el que la recta que pasa por uno o más lados corta a otro lado del polígono.

Polígono convexo. Es aquel cuyos lados interiores son menores que 180º. Además, la recta que pasa por cualquiera de los lados no corta a ningún otro lado del polígono.

Polinomio. Expresión algebraica que consta de uno o más términos.

R

Recíproco de un número. El recíproco de un número real a es el número real $\frac{1}{a}$, tal que el producto con a da como resultado 1.

Rectas paralelas. Líneas rectas que tienen la misma pendiente y no se cortan en ningún punto.

Rectas perpendiculares. Líneas rectas en las que el producto de sus pendientes es igual a -1. Forman cuatro ángulos rectos en el punto donde se cortan.

Rectas secantes. Líneas rectas que se cortan en un punto único.

S

Sistemas de ecuaciones lineales. Conjunto de dos ecuaciones lineales con dos variables o incógnitas. El conjunto de parejas ordenadas que satisfacen ambas ecuaciones se denomina conjunto solución del sistema.

T

Teorema. Proposición que afirma una verdad demostrable.

Teorema de Pitágoras. Teorema que establece que, en los triángulos rectángulos, la suma de los cuadrados de las medidas de los catetos es igual al cuadrado de la medida de la hipotenusa.

Término. Cada uno de los sumandos que aparecen en una expresión algebraica.

Triángulo acutángulo. Triángulo que tiene los tres ángulos agudos.

Triángulo equiángulo. Triángulo cuyos ángulos interiores tienen igual medida.

Triángulo equilátero. Triángulo que tiene todos los lados iguales.

Triángulo escaleno. Triángulo que tiene todos los lados diferentes.

Triángulo isósceles. Triángulo que tiene dos lados iguales.

Triángulo obtusángulo. Triángulo que tiene un ángulo obtuso.

Triángulo rectángulo. Triángulo que tiene un ángulo recto.

Triángulos congruentes. Triángulos en los que hay una correspondencia entre sus vértices, de modo que cada par de lados y de ángulos correspondientes miden lo mismo.

V

Valor absoluto. El valor absoluto de un número real c se simboliza $|c|$ y se define como:

$$|c| = \begin{cases} c, \text{ si } c > 0 \\ -c, \text{ si } c < 0 \end{cases}$$

Valor numérico de un monomio. Número que se obtiene al sustituir las letras por números.

Variable dependiente. Variable cuyos valores dependen de los valores que se asignen a la variable independiente.

Variable independiente. Variable a la cual se asignan valores arbitrarios en una función.

Bibliografía

- Abdón Montenegro, Ignacio. *Evaluemos competencias matemáticas*. Cooperativa editorial Magisterio, Bogotá, 1999.
- Alem, Jean Pierre. *Nuevos juegos de ingenio y entretenimiento matemático.* Editorial Gedisa, Barcelona, España, 1990.
- Alsina Catalá, Claudi; Burgués F., Carme, y Fortuny A., Josep María. *Materiales para construir la geometría*. Síntesis, Madrid, 1995.
- Boyer, Carl B. *Historia de las matemáticas*. Alianza Editorial, España, 2007.
- Castro, Encarnación; Rico, Luis, y Castro, Enrique. *Números y operaciones*. Síntesis, Madrid, 1996.
- Centeno Pérez, Julia. *Matemáticas: cultura y aprendizaje 5.* Editorial Síntesis, España, 1997.
- Clements et al. Serie Awli. *Geometría*. Pearson Educación, México, 1998.
- De Prada, V. *Cómo enseñar las magnitudes, la medida y la proporcionalidad*. Ágora, Málaga, 1990.
- Dickson, Linda. *El aprendizaje de las matemáticas*. Editorial Labor, Madrid, España, 1991.
- Doran, Jody L.; Hernández, Eugenio. *Las matemáticas en la vida cotidiana*. Addison Wesley V. A. M, Madrid, 1994.
- Fournier, Jean Louis. *Aritmética aplicada e impertinente*. Editorial Gedisa, Barcelona, España, 1995.
- Jovette, André. *El secreto de los números*. Editorial Intermedio, Bogotá, 2002.
- Küchemann, D. *The meaning children give to the letters in generalised arithmetic*. En: Cognitive Development Research in Sci. and Math. 1980. The University of Leeds, págs. 28-33.
- Leithold, Louis. *El cálculo con geometría analítica*. Harla, S. A. de C.V., México, 1972.
- Mason, J.; Burton, L.; Stacey, K. *Pensar matemáticamente*. Mec/ Labor, 1992.
- Moise, Edwin; Downs, Floyd. *Geometría moderna*. Addison Wesley, Estados Unidos, 1966.
- Perelman, Y. *Aritmética recreativa*. Mir, Moscú, 1986.
- Pérez, A., Bethencourt, M., Rodríguez, M. (2004). *El sistema numérico decimal*. Caracas: Federación Internacional Fe y Alegría.
- Polya, G. *Cómo plantear y resolver problemas*. Trillas, México, 1989.
- Resnick, Robert. *Física volúmenes I y II*. Compañía Editorial Continental S. A., España, 1996.
- Rich, Barnett. *Geometría*. Mc Graw Hill, México, 1991.
- Sestier, Andrés. *Historia de las matemáticas*. Limusa, México 1983.
- Socas, Martín M.; Camacho, Matías y otros. *Iniciación al álgebra*. Editorial Síntesis, S. A., México, 1991.
- Spiegel, Murray R. *Probabilidad y estadística*. Mc Graw Hill, México, 1975.
- Suppes, Patrick; Hill, Shirley. *Introducción a la lógica matemática*. Editorial Reverté S. A., Colombia, 1976.
- Swokowski, Earl; Cole, Jeffery. *Álgebra y trigonometría con geometría analítica*. International Thomson Editores, México, 1998.
- Tahan, Malba. *El hombre que calculaba*. Limusa, México, 1988.
- Zill, Dennis; Dewar, Jacqueline. *Álgebra y trigonometría*. Mc Graw Hill,Colombia, 2000.

Webgrafía

- Álvarez, C. (2005, 23 de febrero). Entrevista: Klaus-Jürgen Bathe. El País. Recuperado de: http://elpais.com/diario/2005/02/23/futuro/1109113202_850215.html
- Banco de Objetos Multimedia Educativos. [Consulta: mayo de 2015]. Disponible en: http://www.genmagic.net/
- Cómo mentir con estadísticas. [Consulta: abril de 2015]. Disponible en: http://www.econ.uba.ar/www/departamentos/administracion/plan97/adm_financiera/De%20La%20Fuente/Como_mentir_con_estadisticas.pdf
- Diccionario de la Real Academia Española. [Consulta: mayo de 2015]. Disponible en: http://www.rae.es/
- Disfruta las matemáticas. [Consulta: mayo de 2015]. Disponible en: http://www.disfrutalasmatematicas.com/puzzles/
- Funciones y servicios públicos. [Consulta: mayo de 2015]. Disponible en: http://revista.consumer.es/web/es/20070501/practico/consejo_del_mes/71515.php#rc-cabecera-container
- Geometría recreativa de Yacob Perelman. [Consulta: mayo de 2015]. Disponible en: http://jnsilva.ludicum.org/HMR13_14/Perelman_Geometry.pdf
- Networking and Emerging Optimization (2015). RSA. Madrid, España: Disponible en: http://neo.lcc.uma.es/evirtual/cdd/tutorial/presentacion/rsa.html
- ¿Qué es una bolsa de valores? [Consulta: abril de 2015]. Disponible en: http://dinero.about.com/od/Ahorrando/a/que-Es-Una-Bolsa-De-Valores.htm